Matemáticas III

Parcial 2 - Guías 4 – 6

Farith J. Briceño N. - 2017

Material en revisión

Indice

Matemática III - Guía 4

Vectores en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-3.04**

- Vectores en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$. Operaciones entre vectores.
- Producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{C}^n$. Ángulo entre vectores.
- Producto entre vectores. Proyecciones.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 67 *: Halle los valores de las constantes* α *y* β *para que los vectores*

$$\boldsymbol{a} = \left(\alpha\beta, 4\beta - 1, 4\alpha^3 - 6\alpha^2\right) \qquad y \qquad \boldsymbol{b} = \left(1, 5\beta^2, \alpha^4 - 4\alpha + 5\right)$$

sean iguales.

Solución : Observemos que los dos vectores tienen la misma cantidad de componentes, 3 componentes. Además para que sean iguales se debe cumplir

$$1^{\text{ra}} \text{ componente} \qquad \alpha\beta = 1$$

$$2^{\text{da}} \text{ componente} \qquad 4\beta - 1 = 5\beta^2 \quad \Longrightarrow \quad 5\beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{2 \pm i}{5}}$$

$$3^{\text{ra}} \text{ componente} \qquad 4\alpha^3 - 6\alpha^2 = \alpha^4 - 4\alpha + 5 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^4 - 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0$$

De la ecuación de la primera componente tenemos, si $\beta = \dfrac{2+i}{5}$, que

$$\alpha\beta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\left(\frac{2+i}{5}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 - i,$$

mientras que, para $\beta = \dfrac{2-i}{5}$, se tiene que

$$\alpha\beta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\left(\frac{2-i}{5}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 + i,$$

por último, al sustituir estos valores en la ecuación de la tercera componente, se cumple la igualdad, por lo tanto, dicha ecuación también se satisface, luego los valores buscados son

$$\boxed{\beta = \frac{2+i}{5}, \qquad \alpha = 2 - i} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\beta = \frac{2-i}{5}, \qquad \alpha = 2 + i}$$

★

Ejemplo 68 *: Sean* $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{3}{2}, -2, \pi, 4\right)$ *y* $k = -2$, *hallar* $k\boldsymbol{a}$.

Solución : Tenemos que

$$k\boldsymbol{a} = -2\left(\frac{3}{2}, -2, \pi, 4\right) = (-3, 4, -2\pi, -8),$$

luego, el vector múltiplo escalar de $\boldsymbol{a}$, para $k = -2$, viene dado por

$$\boldsymbol{b} = (-3, 4, -2\pi, -8)$$

★

Ejemplo 69 *: Sean* $\boldsymbol{a} = (-2, 5)$ *y* $\boldsymbol{b} = (-3, 0)$*. Hallar* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$*.*

Solución : Tenemos que

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2, 5) + (-3, 0) = (-2 + (-3), 5 + 0) = (-5, 5),$$

luego, el vector suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, viene dado por

$$\boldsymbol{c} = (-5, 5)$$

★

Ejemplo 70 *: Sean* $\boldsymbol{u} = \left(-3, -2, 1, \frac{2}{5}\right)$ *y* $\boldsymbol{v} = \left(-5, \frac{3}{2}, 2i, 3\right)$*. Hallar* $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$*.*

Solución : Tenemos que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} &= \left(-5, \frac{3}{2}, 2i, 3\right) - \left(-3, -2, 1, \frac{2}{5}\right) = \left(-5 - (-3), \frac{3}{2} - (-2), 2i - (1), 3 - \left(\frac{2}{5}\right)\right)\\ &= \left(-5 + 3, \frac{3}{2} + 2, 2i - 1, 3 - \frac{2}{5}\right) = \left(-2, \frac{7}{2}, -1 + 2i, \frac{13}{5}\right),\end{aligned}$$

luego, el vector obtenido de la resta de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$, viene dado por

$$\boldsymbol{w} = \left(-2, \frac{7}{2}, -1 + 2i, \frac{13}{5}\right).$$

★

Ejemplo 71 *: Sean* $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 5, -3)$ *y* $\boldsymbol{b} = (4, -3, 0, -1)$*. Hallar el producto escalar entre* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$

Solución : Tenemos que

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (-2, 1, 5, -3) \cdot (4, -3, 0, -1) = (-2)(4) + (1)(-3) + (5)(0) + (-3)(-1) = -8 - 3 + 0 + 3 = -8,$$

luego,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -8.$$

★

Ejemplo 72 *: Dados los vectores* $\boldsymbol{u} = (-1, 3)$*,* $\boldsymbol{v} = (-2, -1)$*,* $\boldsymbol{w} = (1, 2)$*,* $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$*. Hallar*

1. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w}$
2. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$
4. $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

Solución : 1. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + (-4)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$3\boldsymbol{v} = 3(-2, -1) = ((3)(-2), (3)(-1)) = (-6, -3),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{w} = -4(1, 2) = ((-4)(1), (-4)(2)) = (-4, -8),$$

así,

$$\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w} = (-1, 3) + (-6, -3) + (-4, -8) = (-1 + (-6) + (-4), 3 + (-3) + (-8)) = (-11, -8).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = (-11, -8)$.

2. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{p} + (-4)\,\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u},$$

donde,

$$2\boldsymbol{p} = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left((2)\left(\frac{1}{2}\right), (2)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{w} = -4\,(1,2) = ((-4)\,(1)\,, (-4)\,(2)) = (-4, -8)$$

y

$$6\boldsymbol{u} = 6\,(-1,3) = ((6)\,(-1)\,, (6)\,(3)) = (-6, 18)\,,$$

así,

$$2\boldsymbol{p} = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right) + (-4,-8) + (-6,18) = \left((1) + (-4) + (-6)\,, \left(\frac{2}{3}\right) + (-8) + (18)\right) = \left(-9, \frac{32}{3}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(-9, \frac{32}{3}\right)$.

3. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \left(-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{u} + \left(-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{v} + (-1)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{4}\,(-1,3) = \left(\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)\,, \left(-\frac{1}{4}\right)(3)\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right),$$

mientras que,

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{v} = -\frac{3}{2}\,(-2,-1) = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)\,, \left(-\frac{3}{2}\right)(-1)\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

y

$$(-1)\,\boldsymbol{w} = -\,(1,2) = ((-1)\,(1)\,, (-1)\,(2)) = (-1,-2)\,,$$

así,

$$\boldsymbol{p} - \frac{1}{4}\boldsymbol{u} - \frac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) + \left(3, \frac{3}{2}\right) + (-1,-2) = \left(\frac{11}{4}, -\frac{11}{12}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(\frac{11}{4}, -\frac{11}{12}\right)$.

4. Tenemos que

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} + (-4)\,\boldsymbol{p} + (-\,|\boldsymbol{v}|)\,\boldsymbol{w},$$

donde,

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10},$$

así,

$$|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} = \sqrt{10}\,(-1,3) = \left(-\sqrt{10}, 3\sqrt{10}\right),$$

mientras que,

$$(-4)\,\boldsymbol{p} = -4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left((-4)\left(\frac{1}{2}\right), (-4)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-2, -\frac{4}{3}\right),$$

por último,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5},$$

con lo que,

$$(-|\boldsymbol{v}|)\,\boldsymbol{w} = -\sqrt{5}\,(1,2) = \left(\left(-\sqrt{5}\right)(1)\,,\left(-\sqrt{5}\right)(2)\right) = \left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right),$$

entonces,

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w} = (-\sqrt{10}, 3\sqrt{10}) + \left(-2, -\frac{4}{3}\right) + (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$$

$$= \left(-\sqrt{10} - 2 - \sqrt{5}, 3\sqrt{10} - \frac{4}{3} - 2\sqrt{5}\right).$$

Luego, $\boldsymbol{a} = \left(-\sqrt{10} - 2 - \sqrt{5}, 3\sqrt{10} - \frac{4}{3} - 2\sqrt{5}\right).$ ★

Ejemplo 73 *: Determine el valor de* α *para que los siguientes conjuntos de vectores sean ortogonales*

a. $\{(1,2)\,,\ (\alpha,5)\}$ *b.* $\{(1,2,-1)\,,\ (3,1,\alpha)\}$

Solución : *a.* Es conocido que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, así,

$$(1,2)\cdot(\alpha,5) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha + 10 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -10.$$

b. Tenemos que

$$(1,2,-1)\cdot(3,1,\alpha) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 3 + 2 - \alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 5.$$

★

Ejemplo 74 *: Demostrar que si* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *es un vector arbitrario en* $\mathbb{R}^3$*, entonces*

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

donde, $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$*,* $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ *y* $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ *son los vectores canónicos de* $\mathbb{R}^3$.

Demostración : Tenemos que

$$a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = a_1\,(1,0,0) + a_2\,(0,1,0) + a_3\,(0,0,1)$$

$$= (a_1,0,0) + (0,a_2,0) + (0,0,a_3) = (a_1,a_2,a_3) = \boldsymbol{a}.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 75 *: Demuestre que si* $\boldsymbol{v} = (a,b)$*, un vector de* $\mathbb{R}^2$ *diferente de cero, entonces*

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

es un vector que tiene norma 1*, el vector* $\boldsymbol{u}$ *se denomina* ***vector unitario****.*

Demostración : Tenemos que

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} = 1,$$

por lo que, el vector $\boldsymbol{u}$ es unitario y la dirección de $\boldsymbol{v}$ es

$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(a,b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \boldsymbol{u}.$$

★

Ejemplo 76 *: Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que* $(3, 1, -7)$. *Encuentre también un vector de longitud* 5 *orientado en la dirección opuesta.*

Solución : Normalizamos el vector, para ello calculamos la norma del vector dado

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{59},$$

así, el vector unitario es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, -\frac{7}{\sqrt{59}}\right).$$

El vector buscado es

$$\boldsymbol{a} = -5\left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, -\frac{7}{\sqrt{59}}\right).$$

★

Ejemplo 77 *: Sean* $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1)$. *Si* $\boldsymbol{\gamma}$ *es un vector tal que* $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$ *y* $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3$. *Hallar* $\boldsymbol{\gamma}$.

Solución : Sea $\boldsymbol{\gamma} = (x, y)$, entonces se cumple que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1, & \text{es decir,} \qquad (1,2) \cdot (x,y) = x + 2y = -1, \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3, & \text{es decir,} \qquad (-1,1) \cdot (x,y) = -x + y = 3, \end{cases}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases} \qquad \text{de aquí,} \qquad 3y = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{3},$$

con lo que,

$$x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x + \frac{4}{3} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{7}{3},$$

entonces

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

★

Ejemplo 78 *: Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores* $(4, -3, -2)$ *y* $(-1, 2, 5)$.

Solución : Es conocido que

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta,$$

de aquí,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|},$$

donde,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (4, -3, -2) \cdot (-1, 2, 5) = -20,$$

mientras que,

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \qquad \text{y} \qquad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2} = \sqrt{30},$$

así,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{-20}{\sqrt{29}\sqrt{30}} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arccos\left(\frac{-20}{\sqrt{29}\sqrt{30}}\right).$$

★

Ejemplo 79 *: Describa los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3, -1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen.*

Solución : Sea $\boldsymbol{v} = (x, y)$ los vectores genéricos que sean ortogonales al vector $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, entonces

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) \cdot (3, -1) = 3x - y = 0.$$

Luego, los vectores que son ortogonales al vector $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, son de la forma $\boldsymbol{v} = (x, 3x)$, es decir, los de la forma $y = 3x$, lo cual representa una recta de pendiente 3 que pasa por el origen de coordenada. ★

Ejemplo 80 *: Si $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$. Demuestre que*

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad y \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

donde θ es la dirección de $\boldsymbol{v}$, es decir, θ es el ángulo director asociado a x.

Demostración : Sean θ y β los ángulos directores del vector $\boldsymbol{v} = (a, b)$ respecto a los vectores canónicos $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ respectivamente, entonces

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{i}|} = \frac{(a, b) \cdot (1, 0)}{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{j}|} = \frac{(a, b) \cdot (0, 1)}{\sqrt{(a)^2 + (b)^2}\sqrt{(0)^2 + (1)^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Puesto que los vectores canónicos son ortogonales, entonces

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

así,

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta + (1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\theta,$$

luego

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

★

Ejemplo 81 *: Si $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado al vector canónico $\boldsymbol{i}$.*

Solución : Del ejemplo 80

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-3}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{13}},$$

así,

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

★

Ejemplo 82 *: Sea $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ un vector que parte del origen y apunta hacia el primer octante. Si $|\boldsymbol{u}| = 5$, encuentre c.*

Solución : De la condicón $|\boldsymbol{u}| = 5$, tenemos

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (c)^2} = \sqrt{13 + c^2} = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad 13 + c^2 = 25 \qquad \Longrightarrow \qquad c^2 = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \pm\sqrt{12}$$

como el vector $\boldsymbol{u}$ apunta hacia el primer octante, entonces $c = \sqrt{12}$. ★

Ejemplo 83 : *Responda* ***VERDADERO*** *ó* ***FALSO***. *Justifique su respuesta*

Dos de los ángulos directores de cierto vector de $\mathbb{R}^3$ *son iguales a* $\frac{\pi}{4}$, *entonces, el tercer ángulo también es* $\frac{\pi}{4}$.

Solución : Es conocido que
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^3\gamma = 1,$$
donde, α, β y γ representan los ángulos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$, puesto que, dos de ellos son iguales a $\frac{\pi}{4}$, supongamos que sean α y β, entonces,
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \cos^2\gamma = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1,$$
de aquí,
$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\gamma = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\gamma = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$
Así, concluimos que la proposción es **FALSA**. ★

Ejemplo 84 : *Halle el vector* $\boldsymbol{v}$ *de longitud* 4 *cuyos cosenos directores son* $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{11}$ *y* $-\frac{6}{11}$.

Solución : Es conocido que, si α, β y γ son los ángulos directores de un vector $\boldsymbol{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, con respecto a los vectores canónicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ respectivamente, entonces
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\gamma = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$
Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{w} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es un vector unitario, ya que
$$\boldsymbol{w} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\right) = \frac{\boldsymbol{v_1}}{|\boldsymbol{v_1}|}.$$
Sea $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ el vector buscado de norma 4, es decir,
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 4,$$
entonces, el vector buscado es
$$\boldsymbol{v} = 4(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 4\left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right),$$
es decir,
$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{24}{11}, \frac{28}{11}, -\frac{24}{11}\right).$$
★

Ejemplo 85 : *Suponga que los vectores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ *forman entre sí un ángulo de* $\frac{\pi}{6}$. *Si* $|\boldsymbol{u}| = 6$, $|\boldsymbol{v}| = 5$, *calcular* $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

Solución : Es conocido que
$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\operatorname{sen}\theta,$$
donde, θ es el ángulo que forman los vectores $|\boldsymbol{u}|$ y $|\boldsymbol{v}|$, así,
$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = (6)(5)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = (30)\left(\frac{1}{2}\right) = 15 \qquad \Longrightarrow \qquad |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = 15.$$
★

Ejemplo 86 *: Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Demuestre que*

$$\text{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = c\ \text{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

Demostración : Tenemos que

$$\text{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = \frac{c\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c\ \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c\ \text{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

Luego.

$$\text{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = \frac{c\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c\ \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{u} = c\ \text{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

★

Ejemplo 87 *: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente. Calcule*

$$|(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})|.$$

Solución : Por propiedades del producto vectorial, se tiene

$$(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times(3\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + (2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}) - (2\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v},$$

observemos que

- los vectores $\boldsymbol{u}$ y $2\boldsymbol{u}$, son paralelos, por lo tanto $\boldsymbol{u}\times(2\boldsymbol{u}) = 0$,
- los vectores $\boldsymbol{v}$ y $2\boldsymbol{v}$, son paralelos, por lo tanto $(2\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} = 0$,
- el producto $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$,

luego,

$$(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = -(-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}) + 6\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = 7\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u},$$

por lo que,

$$|(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})| = |7\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}| = 7\,|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{u}|\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7\,(4)\,(2)\,(1) = 56,$$

es decir,

$$|(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})| = 56.$$

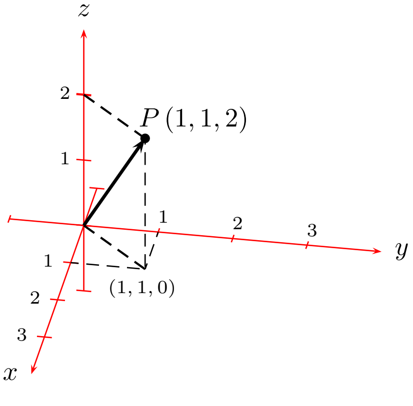
★

Ejemplo 88 *: Representar los siguientes puntos en el sistema coordenado $\mathbb{R}^3$ y graficar el vector posición asociado*

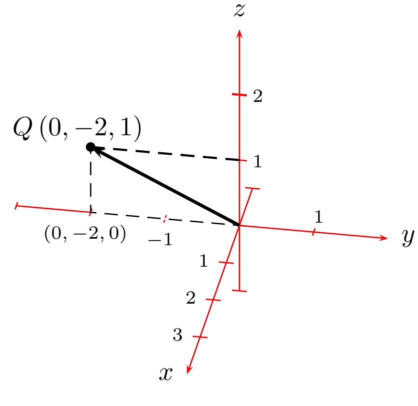
1. $P\,(1,1,2)$ 2. $Q\,(0,-2,1)$ 3. $R\,(3,3,1)$ 4. $A\,(2,-1,-2)$

Solución :

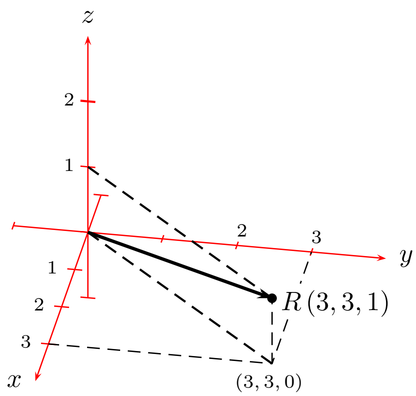
(1)



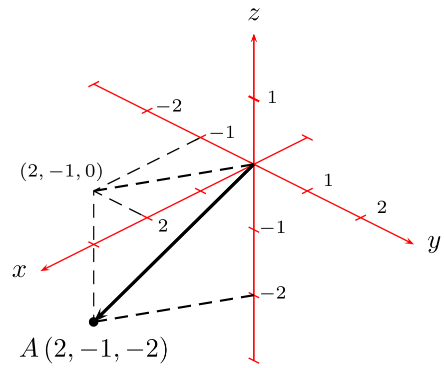
(2)



(3)



(4)



★

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \;/\; x_i \in \mathbb{R}, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$, definimos sobre $\mathbb{R}^n$ las operaciones

   - **Suma de vectores** : Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces la **suma de los vectores** $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se define por
   $$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n)$$
   - **Multiplicación de un vector por un escalar** : Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y k un escalar cualquiera, definimos la **multiplicación de un vector por un escalar** como
   $$k\boldsymbol{a} = k(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, ka_3, \ldots, ka_n)$$

   Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, y sean α y β escalares cualesquiera, demostrar que

   (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. Ley conmutativa para la suma de vectores.

   (b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Ley asociativa para la suma de vectores.

   (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$, donde, $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Elemento neutro para la suma.

   (d) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Elemento opuesto para la suma

   (e) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$. Primera ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

   (f) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$. Segunda ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

   (g) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$. Ley asociativa para la multiplicación por un escalar.

   (h) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. Elemento identidad para la multiplicación por un escalar.

2. Sea $\mathbb{C}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \;/\; x_i = a_i + ib_i \in \mathbb{C}, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$, definimos sobre $\mathbb{C}^n$ las operaciones

   - **Suma de vectores** : Sean
   $$\boldsymbol{x} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3, \ldots, a_n + ib_n) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{y} = (c_1 + id_1, c_2 + id_2, c_3 + id_3, \ldots, c_n + id_n)$$
   vectores de $\mathbb{C}^n$, entonces la **suma de los vectores** $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ se define por
   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a_1 + c_1 + i(b_1 + d_1), a_2 + c_2 + i(b_2 + d_2), a_3 + c_3 + i(b_3 + d_3), \ldots, a_n + c_n + i(b_n + d_n))$$
   - **Multiplicación de un vector por un escalar** : Sean $\boldsymbol{x} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3, \ldots, a_n + ib_n)$ un vector de $\mathbb{C}^n$ y k un escalar cualquiera, definimos la **multiplicación de un vector por un escalar** como
   $$k\boldsymbol{x} = (ka_1 + ikb_1, ka_2 + ikb_2, ka_3 + ib_3, \ldots, ka_n + ikb_n)$$

Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ vectores de $\mathbb{C}^n$, y sean α y β escalares cualesquiera, demostrar los mismos item del ejercicio 1

3. Sean $\boldsymbol{u} = \left(\alpha^3, \alpha+\beta, 1\right)$ y $\boldsymbol{v} = \left(8, -2+\sqrt{3}i, \beta^2\right)$. Hallar los valores de α y β, si existen, para que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

4. Sean $\boldsymbol{a} = (1, 3\beta+1, \alpha, 3)$ y $\boldsymbol{b} = \left(\alpha^2+2, \beta^2-1, \alpha^4+\alpha-1, \beta\right)$. Hallar los valores de α y β, si existen, para que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

5. Calcular la longitud de los vectores $\boldsymbol{u} = \left(-\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right)$ y $\boldsymbol{v} = \left(2, \sqrt{5}, -\sqrt{2}\right)$.

6. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (-1, 3)$, $\boldsymbol{v} = (-2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2)$, $\boldsymbol{p} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$, en $\mathbb{R}^2$, hallar cada uno de los siguientes vectores

   1. $\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w}$ 2. $2\boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{w} + 6\boldsymbol{u}$ 3. $\boldsymbol{p} - \dfrac{1}{4}\boldsymbol{u} - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ 4. $|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

7. Hallar cada uno de los siguientes vectores

   1. $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{u}$ 2. $|\boldsymbol{w}|\,\boldsymbol{a} - |2\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{u}$ 3. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} + \dfrac{\boldsymbol{a}}{2} - \dfrac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}$ 4. $|\boldsymbol{u}|\,\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{b} - |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{w}$

   para los siguientes vectores

   (a) $\boldsymbol{a} = (1, 10)$, $\boldsymbol{b} = (4, -5)$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1, -3)$, $\boldsymbol{w} = (-3, 2)$.
   (b) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (4, -2, 7)$, $\boldsymbol{u} = (-3, 4, 2)$, $\boldsymbol{v} = (7, -1, 3)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2, 8)$.
   (c) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0, 2, -2)$, $\boldsymbol{u} = (2, -1, -5, 2)$, $\boldsymbol{v} = (1, -1, -4, 0)$, $\boldsymbol{w} = (2, 1, 1, 6)$.

8. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (5, -3, -1)$ y $\boldsymbol{c} = (5, -7, 2)$, calcule

   1. $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}|$ 2. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - 3\boldsymbol{b}|$ 3. $|4\boldsymbol{a}|$ 4. $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|$ 5. $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}|$

   6. $|-2\,|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}||$ 7. $||\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{c}|$ 8. $|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} - |\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{b}|$ 9. $||\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{c} - |\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}|$

9. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^2$, entonces
$$\boldsymbol{a} = a_1\ \boldsymbol{i} + a_2\ \boldsymbol{j},$$
donde, $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

10. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^3$, entonces
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$
donde, $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

11. Demostrar que si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \boldsymbol{e_i},$$
donde, $\boldsymbol{e_i}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

12. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = (a, b)$, un vector de $\mathbb{R}^2$ diferente de cero, entonces
$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
es un vector que tiene norma 1, el vector $\boldsymbol{u}$ se denomina **vector unitario**.

13. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$, un vector de $\mathbb{R}^3$ diferente de cero, entonces

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right)$$

es un vector unitario.

14. Según lo demostrado en los ejercicios 12 y 13. ¿Podría dar un resultado general para un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$? ¿Cuál sería ese resultado?

15. Sea $\boldsymbol{v} = (2, -1)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

16. Sea $\boldsymbol{v} = (3, -1, -2)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

17. Sea $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1, 0, -1\right)$. Hallar un vector unitario asociado a $\boldsymbol{v}$.

18. Dados los vectores

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallar

1. Los productos escalares que sean posibles. 2. $(-3\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ 3. $\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})$ 4. $(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e})\, \boldsymbol{c}$

19. Sean $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, 1)$. Si $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector tal que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$ y $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3$. Hallar $\boldsymbol{\gamma}$.

20. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

21. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{y} = (1, -2, 2)$.

22. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -3, -2)$ y $\boldsymbol{b} = (-1, 2, 5)$.

23. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (0, 3, 9)$ y $\boldsymbol{b} = (1, -3, 4)$.

24. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (3, 2, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$.

25. Encuentre el ángulo comprendido entre los vectores $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$ y $\boldsymbol{b} = (2, -3, 1)$.

26. Determine si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ forman un ángulo agudo, un ángulo obtuso o son ortogonales.

1. $\boldsymbol{u} = (6, 1, 4)$, $\boldsymbol{v} = (2, 0, -3)$
2. $\boldsymbol{u} = (0, 0, -1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)$
3. $\boldsymbol{u} = (-6, 0, 4)$, $\boldsymbol{v} = (3, 1, 6)$
4. $\boldsymbol{u} = (2, 4, -8)$, $\boldsymbol{v} = (5, 3, 7)$.

27. Sean $\boldsymbol{v} = (a, b)$, $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ y $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Sean

- θ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{i}$.
- ϕ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{j}$.

(a) Demostrar que

$$\cos\theta = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{y} \qquad \cos\phi = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|}$$

Los ángulos θ y ϕ se denominan **ángulos directores**, mientras que sus cosenos se denominan **cosenos directores**.

(b) Demuestre que $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$.

28. Sean $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Sean

    - θ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{i}$.
    - ϕ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{j}$.
    - ψ el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{k}$.

    (a) Demostrar que

    $$\cos\theta = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|}, \qquad \cos\phi = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{y} \qquad \cos\psi = \frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$

    Los ángulos θ, ϕ y ψ se denominan **ángulos directores**, mientras que sus cosenos se denominan **cosenos directores**.

    (b) Demuestre que $\cos^2\theta + \cos^2\phi + \cos^2\psi = 1$.

29. Según lo demostrado en los ejercicios 27 y 28. ¿Podría dar un resultado general para un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$? ¿Cuál sería ese resultado?

30. Encuentre todos los vectores perpendiculares tanto a $(1, -3, -2)$ como a $(-3, 6, 5)$.

31. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{i} - \alpha\boldsymbol{j}$ son ortogonales.

32. Encuentre todos los vectores perpendiculares tanto a $-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ como a $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

33. Calcule la componente z del vector $\boldsymbol{b} = (2, 4, z)$, si se sabe que forma un ángulo de $60°$ con el vector $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)$.

34. ¿Cuál de las siguientes expresiones no tiene sentido?

(a) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$	(b) $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w}$	(c) $\lvert\boldsymbol{u}\rvert(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$
(d) $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}$	(e) $(\lvert\boldsymbol{u}\rvert\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$	(f) $\lvert\boldsymbol{u}\rvert\cdot\boldsymbol{v}$

35. Describa los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3, -1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen.

36. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\boldsymbol{u} = (\alpha, \beta)$ y $\boldsymbol{v} = (\beta, -\alpha)$ son ortogonales.

37. Determine el valor de α para que los siguientes conjuntos de vectores sean ortogonales

    1. $\{(0,1), (1,\alpha)\}$ 2. $\{(1,2), (\alpha,5)\}$ 3. $\{(2,3,0), (0,0,\alpha)\}$ 4. $\{(1,2,-1), (3,1,\alpha)\}$

38. (a) Defina ángulos directores y cosenos directores.

    (b) Demuestre que los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ son ortogonales.

    (c) Halle los cosenos directores del vector $\boldsymbol{v} = (a, b)$, diferente de cero, de $\mathbb{R}^2$.

    (d) Sean θ el ángulo director de $\boldsymbol{v}$ respecto al primer vector canónico $\boldsymbol{i}$ y ϕ el ángulo director de $\boldsymbol{v}$ respecto al segundo vector canónico $\boldsymbol{j}$. Demuestre que

    $$\cos\phi = \operatorname{sen}\theta,$$

    es decir, si $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, entonces

    $$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

    donde θ es la dirección de $\boldsymbol{v}$, es decir, θ es el ángulo director asociado al vector canónico $\boldsymbol{i}$.

39. Demuestre que si $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} \neq 0$, entonces
$$\boldsymbol{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\boldsymbol{j}$$
es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{v}$.

40. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -2, 5)$
   (a) Halle la dirección de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
   (b) Calcule los cosenos directores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

41. Si $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado a $\boldsymbol{i} = (1, 0)$.

42. Si $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo director asociado a $\boldsymbol{i} = (1, 0)$.

43. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $(3, 1, -7)$. Encuentre también un vector de longitud 5 orientado en la dirección opuesta.

44. Encuentre un vector de longitud 10 con dirección opuesta a $-2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

45. Halle el vector $\boldsymbol{v}$ de longitud 4 cuyos cosenos directores son $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{11}$ y $-\frac{6}{11}$.

46. Sea $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ un vector que parte del origen y apunta hacia el primer octante. Si $|\boldsymbol{u}| = 5$, encuentre c.

47. Dados los puntos $A(2, -1, 5)$, $B(5, 5, 8)$ y $C(7, 9, 10)$, hallar el coseno del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

48. Encuentre el ángulo $\sphericalangle P_1P_2P_3$ si $P_1(2, -3, 4)$, $P_2(-2, 6, 1)$ y $P_3(2, 0, 2)$.

49. Encuentre en cada caso la proyección ortogonal del vector $\boldsymbol{b}$ sobre el vector $\boldsymbol{a}$.
   1. $\boldsymbol{a} = (2, 0, -3)$ y $\boldsymbol{b} = (4, 3, -1)$
   2. $\boldsymbol{a} = (-5, -3, 4)$ y $\boldsymbol{b} = (2, 7, -5)$
   3. $\boldsymbol{a} = (-6, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (-2, 3)$
   4. $\boldsymbol{a} = (2, 5)$ y $\boldsymbol{b} = (-1, -1)$

50. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y c un número real. Demuestre que
$$\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}} c\boldsymbol{v} = c \operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}.$$

51. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \frac{5}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{w} = (2, 1, -2)$.

52. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

53. En cada uno de los incisos siguientes, encuentre el vector $\boldsymbol{u} = \operatorname{proy}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$, proyección del vector $\boldsymbol{y}$ sobre el vector $\boldsymbol{x}$. Verifique en cada caso que el vector obtenido es ortogonal a $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}$
   a. $\boldsymbol{x} = (2, 5)$, $\boldsymbol{y} = (3, 4)$
   b. $\boldsymbol{x} = (4, 2)$, $\boldsymbol{y} = (2, 1)$
   c. $\boldsymbol{x} = (1, 0)$, $\boldsymbol{y} = (4, 5)$
   d. $\boldsymbol{x} = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{y} = (1, 0, 1)$
   e. $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{y} = (0, 2, 0)$
   f. $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (0, 2, 0, 3)$

54. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 5)$.

55. Sean los vectores $\boldsymbol{u} = (\alpha, \beta)$ y $\boldsymbol{v} = (4, 0)$. Si el ángulo que ellos forman es $\frac{\pi}{4}$, hallar α y β, tales que $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = (3, 0)$.

56. Sea $\boldsymbol{v}$ el vector en $\mathbb{R}^3$ cuyo punto inicial está en $(1,3,7)$ y cuyo punto final está en $(4,5,7)$. Hallar la proyección del vector $(1,2,1)$ sobre $\boldsymbol{v}$.

57. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son

    1. $A(0,0)$, $B(5,3)$, $C(7,8)$
    2. $A(0,0)$, $B(9,1)$, $C(5,4)$
    3. $A(1,3,2)$, $B(2,5,3)$, $C(-2,0,0)$.

58. Dados los vectores $\boldsymbol{a}=(3,4,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,0,4)$, $\boldsymbol{c}=(4,-2,5)$ y $\boldsymbol{d}=(3,3,7)$, calcule cada una de las siguientes expresiones

    1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
    2. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$
    3. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})$
    4. $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$
    5. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})$
    6. $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$
    7. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
    8. $\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

59. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=5$, calcule $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

60. Considere los vectores $\boldsymbol{u}=(3,1,2)$, $\boldsymbol{v}=(2,-4,3)$, $\boldsymbol{w}=(1,1,7)$, compruebe que
$$(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}.$$

61. Demuestre que si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son paralelos y $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, entonces $\alpha=\beta=0$.

62. Sean $\boldsymbol{u}=(2,-3,-3)$, $\boldsymbol{v}=(3,1,1)$. Calcule

    a. $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ *b.* $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}$ *c.* $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ *d.* $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$

    e. $(2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v})$

63. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ forman entre sí un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$. Demuestre que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

64. Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores $\boldsymbol{u}=(3,2,5)$ y $\boldsymbol{v}=(1,2,7)$.

65. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos $A(2,1,1)$, $B(-3,7,9)$, $C(-1,-5,0)$.

66. Encuentre dos vectores de longitud 10, cada uno de los cuales sea perpendicular tanto a $4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ como a $-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

67. Si $\boldsymbol{a}=(4,-2,1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,3,-2)$ y $\boldsymbol{c}=(-1,4,3)$. Encuentre lo siguiente

    (a) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (b) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (c) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ (d) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

68. Sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ tres vectores tales que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$. Demuestre que
$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}.$$

69. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ son vectores unitarios que forman entre sí un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$. Calcular $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

70. Suponga que los vectores $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ forman entre sí un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$. Si $|\boldsymbol{u}|=6$, $|\boldsymbol{v}|=5$, calcular $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$.

71. Sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ dos vectores cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=5$, calcule $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$.

72. Sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente. Calcule $|(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})|$.

73. Calcular el área del paralelogramo cuyos vértices son $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(-2,1,5)$, $D(-1,3,8)$.

74. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A\,(3,2,3)$, $B\,(-1,2,5)$, $C\,(0,2,7)$.

75. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$\boldsymbol{u} = (2,1,4)\,, \qquad \boldsymbol{v} = (-1,0,9)\,, \qquad \boldsymbol{w} = (3,2,2)\,.$$

76. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A\,(2,1,2)$, $B\,(5,3,7)$, $C\,(-3,4,9)$, $D\,(10,9,11)$.

77. Determine la componente z del vector $\boldsymbol{v} = (2,4,z)$, si se sabe que forma un ángulo de magnitud 60° con el vector $\boldsymbol{w} = (1,2,0)$.

78. Encuentre la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\,(4,1,0)$, $B\,(2,-1,3)$ y $C\,(1,-3,2)$.

79. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERA** ó **FALSA**.

   (a) Si el ángulo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $\dfrac{\pi}{2}$, entonces $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$.

   (b) Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son $n-$vectores, tales que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

   (c) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ múltiplo escalar positivo de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|\,.$$

   (d) No existe α, tal que $\boldsymbol{u} = (-2,5)$ y $\boldsymbol{v} = (\alpha,-2)$ sean ortogonales.

   (e) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que

$$\text{proy}_{\boldsymbol{w}}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \text{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{u} + \text{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v}.$$

   (f) Sean $\boldsymbol{u} = (a,b)$ y $\boldsymbol{v} = (c,d)$ no nulos. Entonces, si $ac+bd<0$, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección.

   (g) Dos de los ángulos directores de cierto vector de $\mathbb{R}^3$ son iguales a $\dfrac{\pi}{4}$, entonces, el tercer ángulo también es $\dfrac{\pi}{4}$.

   (h) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$.

   (i) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v} = -x\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v}$. Entonces, el ángulo formado por $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es independiente de x.

   (j) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

80. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justificar todas sus respuestas.

   1 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ y ϕ el ángulo formado por ellos. Entonces

      a Si $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

      b $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

      c Si $\phi = \pi$, entonces $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$.

      d $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$.

   2 Se dan las siguientes proposiciones:

      i. Los cosenos directores de un vector de $\mathbb{R}^3$ pueden ser $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

      ii. Para todo escalar α y para todo $\boldsymbol{v}$ del plano $\mathbb{R}^2$ se cumple que $|\alpha\boldsymbol{v}| = \alpha\,|\boldsymbol{v}|$.

iii. $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ son paralelos si y solo si $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Entonces, son ciertas

a) Sólo iii *b*) i y iii *c*) Sólo ii *d*) i y ii

3 El ángulo entre $\boldsymbol{u} = (1,1)$ y $\boldsymbol{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ es

a. 105° *b.* 15° *c.* 45° *d.* 60°

4 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy y ϕ el ángulo entre ellos. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son perpendiculares y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ si $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$.

d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ son paralelos y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ si $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$.

5 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy. Entonces

a. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$.

b. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$.

c. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$.

d. $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

6 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores del plano xy y ϕ el ángulo entre ellos. Entonces

a. Si $\phi = 135°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección.

b. Si $\phi = 45°$, entonces $\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} < 0$.

c. Si $\phi = 60°$, entonces $|\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}| = -\text{comp}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$

d. Si $\phi = 150°$, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ tienen direcciones opuestas.

7 Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores y ϕ es el ángulo que ellos forman. Entonces

a. $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$, si $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$.

b. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralela a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$.

c. $\boldsymbol{u} - \text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$.

d. $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ si $\phi = 150°$.

8 Se dan los puntos P y Q y el vector PQ. La alternativa correcta es:

a. $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ = (1,1,4)$ *b.* $P(1,1,-1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ = (-1,1,4)$

c. $P(1,-1,1)$, $Q(0,2,3)$ y $PQ = (-1,1,2)$ *d.* $P(1,-1,1)$, $Q(1,2,3)$ y $PQ = (0,3,4)$

81. Representar los siguientes puntos en el sistema coordenado $\mathbb{R}^2$ y graficar su vector posición asociado.

1. $P(1,0)$ 2. $P(1,1)$ 3. $P(-2,1)$ 4. $P(0,1)$

5. $P(-2,-1)$ 6. $P(3,1)$ 7. $P(3,-2)$ 8. $P(-1,-2)$

82. Representar los siguientes puntos en el sistema coordenado $\mathbb{R}^3$ y graficar su vector posición asociado.

1. $P(2,0,2)$ 2. $P(1,1,2)$ 3. $P(-1,-1,1)$ 4. $P(0,-2,1)$

5. $P(2,-1,-2)$ 6. $P(3,3,1)$ 7. $P(3,-1,0)$ 8. $P(2,-1,-2)$

83. Colocar en la columna de la izquierda la única letra correspondiente de la columna de la derecha. Justificar todas sus respuestas.

( ) $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}$ con $\alpha > 0$	$a)$ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$
( ) El ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $60°$	$b)$ $\lvert \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rvert = \lvert \boldsymbol{u} \rvert + \lvert \boldsymbol{v} \rvert$
( ) $\lvert \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \rvert^2$ es igual a	$c)$ $\lvert \boldsymbol{u} \rvert^2 \lvert \boldsymbol{v} \rvert^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$
( ) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son coplanares	$d)$ $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = 0$
	$e)$ $\lvert \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rvert > \lvert \boldsymbol{u} \rvert + \lvert \boldsymbol{v} \rvert$
	$f)$ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$
	$g)$ $\lvert \boldsymbol{u} \rvert^2 \lvert \boldsymbol{v} \rvert^2 + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$
	$h)$ $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$

Respuestas: Ejercicios

3. $\alpha = i\sqrt{3} - 1$ y $\beta = -1$; 4. No existen valores; 5. $\lvert \boldsymbol{u} \rvert = \sqrt{21}$, $\lvert \boldsymbol{v} \rvert = \sqrt{11}$; 6.1. $(-11, -8)$; 6.2. $\left(-9, \frac{32}{3}\right)$; 6.3. $\left(\frac{11}{4}, -\frac{11}{12}\right)$; 6.4. $\left(-\sqrt{5} - \sqrt{10} - 2, -2\sqrt{5} - \frac{4}{3} + 3\sqrt{10}\right)$; 7.$a$.1 $\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$;

7.a.2 $\begin{pmatrix} -8\sqrt{5} + \sqrt{13} + 6 \\ 10\sqrt{5} + 10\sqrt{13} + 12 \end{pmatrix}$; 7.$a$.3 $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{3} \end{pmatrix}$; 7.$a$.4 $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} + 3\sqrt{10} + 8 \\ -3\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - 10 \end{pmatrix}$; 7.$b$.1 $\begin{pmatrix} -24 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$;

7.b.2 $\begin{pmatrix} 2\sqrt{69} - 8\sqrt{29} - 18 \\ 4\sqrt{29} - \sqrt{69} + 24 \\ 4\sqrt{69} - 14\sqrt{29} + 12 \end{pmatrix}$; 7.$b$.3 $\begin{pmatrix} \frac{8032}{29} \\ -\frac{8037}{58} \\ \frac{14\,057}{29} \end{pmatrix}$; 7.$b$.4 $\begin{pmatrix} 7\sqrt{29} - \sqrt{59} + 8 \\ -\sqrt{29} - 2\sqrt{59} - 4 \\ 3\sqrt{29} - 8\sqrt{59} + 14 \end{pmatrix}$; 7.$c$.1 $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$;

7.c.2 $\begin{pmatrix} \sqrt{42} - 6\sqrt{34} + 12 \\ \sqrt{42} - 6 \\ 2\sqrt{42} - 4\sqrt{34} - 30 \\ 4\sqrt{34} + 4\sqrt{42} + 12 \end{pmatrix}$; 7.$c$.3 $\begin{pmatrix} -\frac{89}{6} \\ \frac{53}{6} \\ \frac{124}{3} \\ -12 \end{pmatrix}$; 7.$c$.4 $\begin{pmatrix} \sqrt{34} - 6\sqrt{2} + 6 \\ -3\sqrt{2} - \sqrt{34} \\ 4 - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{34} \\ -18\sqrt{2} - 4 \end{pmatrix}$; 8.1. $\sqrt{57} + \sqrt{78}$;

8.2. $3\sqrt{19}$; 8.3. $12\sqrt{2}$; 8.4. $\sqrt{227}$; 8.5. $3\sqrt{2} + \sqrt{35} + \sqrt{78}$; 8.6. 10; 8.7. $18\sqrt{17}$;

8.8. $\sqrt{176\sqrt{78} + 3042}$; 8.9. $12\sqrt{19}$; 15. $\boldsymbol{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 16. $\boldsymbol{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$;

17. $\boldsymbol{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; 18.1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -1 - 2i$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = -1 + 2i$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 2 + 5i$, $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 2 - 5i$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = -4 - i$, $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = -4 + i$, $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e} = -32$; 18.2. $12 + 3i$; 18.3. 1; 18.4. $(-64, -32, -32i, -64)$;

19. $\boldsymbol{\gamma} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 20. $\theta = \pi$; 21. $\theta = \frac{1}{4}\pi$; 22. $\theta = \arccos\left(\frac{-20}{\sqrt{870}}\right)$; 23. $\theta = \arccos\left(\frac{9}{2\sqrt{65}}\right)$;

24. $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$; 25. $\theta = \arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$; 26.1. Ortogonal; 26.2. Obtuso; 26.3. Agudo;

26.4. Obtuso; 30. $(-3, 1, -3)\,t$, con $t \in \mathbb{R}$; 32. $(-11, -2, 5)\,t$, con $t \in \mathbb{R}$; 33. $\pm\sqrt{60}$;

34.a. No; 34.b. No; 34.c. Si; 34.d. Si; 34.e. Si; 34.f. No; 35. $y = 3x$;

37.1. $\alpha = 0$; 37.2. $\alpha = -10$; 37.3. $\alpha \in \mathbb{R}$; 37.4. $\alpha = 5$; 40.a. $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{a}}{\lvert \boldsymbol{a} \rvert} = \frac{1}{5}\sqrt{5}\boldsymbol{i} - \frac{2}{5}\sqrt{5}\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{b}}{\lvert \boldsymbol{b} \rvert} = \frac{3}{\sqrt{38}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{38}}\boldsymbol{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\boldsymbol{k}$; 40.$b$. $\cos\theta_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\cos\phi_{\boldsymbol{a}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$ y $\cos\theta_{\boldsymbol{b}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\phi_{\boldsymbol{b}} = \frac{-2}{\sqrt{38}}$, $\cos\psi_{\boldsymbol{b}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$; 41. $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{73}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{\sqrt{73}}$; 42. $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ y $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$;

43. Vector unitario : $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\lvert \boldsymbol{v} \rvert} = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, -\frac{7}{\sqrt{59}}\right)$. Vector longitud 5 : $\left(-\frac{15}{\sqrt{59}}, -\frac{5}{\sqrt{59}}, \frac{35}{\sqrt{59}}\right)$;

44. $\boldsymbol{v} = \frac{10}{\sqrt{38}}(-2, 5, -3)$; 45. $\boldsymbol{v} = \left(\frac{24}{11}, \frac{28}{11}, -\frac{24}{11}\right)$; 46. $c = \sqrt{12}$; 47. $\cos\theta = 1$;

48. $\cos\theta = \frac{33}{\sqrt{1378}}$; 49.1. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{22}{13} \\ 0 \\ -\frac{33}{13} \end{pmatrix}$; 49.2. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{51}{10} \\ \frac{153}{50} \\ -\frac{102}{25} \end{pmatrix}$; 49.3. $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{90}{37} \\ \frac{15}{37} \end{pmatrix}$;

49.4. $\text{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{29} \\ -\frac{35}{29} \end{pmatrix}$; 51. $\text{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 52. $\text{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$; 53.*a*. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{52}{\sqrt{29}} \\ \frac{130}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$;

53.*b*. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$; 53.*c*. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; 53.*d*. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$; 53.*e*. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; 53.*f*. $\boldsymbol{u} \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{8}{\sqrt{7}} \\ \frac{16}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$;

54. $A = \frac{35}{2}$; 55. $\boldsymbol{u}_1 = (3, -3)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (3, 3)$; 56. $\begin{pmatrix} \frac{21}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$; 57.1. $A = \frac{19}{2}$; 57.2. $A = \frac{31}{2}$;

57.3. $A = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; 58.1. $16\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$; 58.2. $-29\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$; 58.3. -602; 58.4. 103;

58.5. $\begin{pmatrix} 48 \\ -59 \\ -10 \end{pmatrix}$; 58.6. $16\sqrt{29}$; 58.7. $\begin{pmatrix} 32 \\ -32 \\ 16 \end{pmatrix}$; 58.8. $\begin{pmatrix} 36 \\ -33 \\ -16 \end{pmatrix}$; 59. $4\sqrt{26}$;

62.*a*. $-11\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$; 62.*b*. $-11\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$; 62.*c*. $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 62.*d*. $22\boldsymbol{j} - 22\boldsymbol{k}$; 62.*e*. $121\boldsymbol{j} - 121\boldsymbol{k}$;

64. $A = 12\sqrt{2}$; 65. $V = \frac{103}{6}$; 66. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} \\ -\frac{20}{7} \\ -\frac{30}{7} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \end{pmatrix}$; 67.*a*. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$;

67.*b*. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -9\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 22\boldsymbol{k}$; 67.*c*. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 47$; 67.*d*. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 2\boldsymbol{i} + 37\boldsymbol{j} + 66\boldsymbol{k}$;

69. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}$; 70. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 15$; 71. $4\sqrt{26}$; 72. 56; 73. $A = \sqrt{269}$; 74. $A = 5$;

75. $V = 15$; 76. $V = \frac{205}{6}$; 77. $z = \pm 2\sqrt{15}$; 78. $\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{34}\sqrt{102}\right)$, $\theta_2 = \arccos\left(\frac{3}{58}\sqrt{174}\right)$,

$\theta_3 = \arccos\left(\frac{20}{493}\sqrt{493}\right)$; 79.*a*. Verdadero; 79.*b*. Falso; 79.*c*. Verdadero; 79.*d*. Falso;

79.*e*. Verdadero; 79.*f*. Falso; 79.*g*. Falso; 79.*h*. Verdadero; 79.*i*. Verdadero; 79.*j*. Verdadero;

80.1. a.; 80.2. a.; 80.3. b.; 80.4. d.; 80.5. c.; 80.6. d.; 80.7. d.; 80.8. b.;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-3.05

- Rectas en $\mathbb{R}^3$. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica y forma simétrica.
- Rectas paralelas. Rectas perpendiculares. Rectas secantes.
- Planos en $\mathbb{R}^3$. Planos paralelos. Planos perpendiculares.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 89 *: Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por el punto* $P\,(2,1,6)$ *y tiene como vector director* $\boldsymbol{v} = (-2,1,2)$.

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo P.

- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, en nuestro caso $\boldsymbol{v}$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son

$$L : \begin{cases} x-2=-2t \\ y-1=t \\ z-6=2t \end{cases} = \begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=6+2t \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,

$$L : \begin{cases} x-2=-2t \\ y-1=t \\ z-6=2t \end{cases} = \begin{cases} t=\dfrac{x-2}{-2} \\ t=y-1 \\ t=\dfrac{z-6}{2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por

$$\frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z-6}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2-x}{2} = y-1 = \frac{z-6}{2}.$$

★

Ejemplo 90 *: Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por los puntos* $P\,(2,1,6)$ *y* $Q\,(-2,1,2)$.

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En virtud que la recta buscada debe pasar por los puntos P y Q, podemos elegir cualquiera de estos dos puntos para este item.

- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, observemos que si consideramos el vector de punto inicial P y punto terminal Q, es decir, el vector de componentes

  $$\overline{\boldsymbol{PQ}} = (-2,1,2)-(2,1,6) = (-4,0,-4)\,,$$

  dicho vector está sobre la recta, por lo tanto es paralelo a ella, es más podemos elegir el vector $\boldsymbol{a} = (1,0,1)$, ya que este es paralelo al vector $\overline{\boldsymbol{PQ}}$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada, considerando el punto $Q(-2,1,2)$, son

$$L : \begin{cases} x+2=t \\ y-1=0 \\ z-2=t \end{cases} = \begin{cases} x=-2+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así, la ecuación forma simétrica viene dada por

$$x+2=z-2, \qquad\qquad y=1.$$

★

Ejemplo 91 *: Determine si el punto* $Q\left(2,\dfrac{9}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ *pertenece a la recta* $L : \begin{cases} x=3-2t \\ y=5-t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

Solución : Para determinar si el punto dado pertenece a la recta L, sustituimos dicho punto en la ecuación de la recta para verificar si satisface las igualdades, así,

$$\begin{cases} (2)=3-2t \\ \left(\dfrac{9}{2}\right)=5-t \\ \left(\dfrac{9}{2}\right)=-1+3t \end{cases} \quad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \quad 2t=1 \quad \Longrightarrow \quad t=\frac{1}{2}.$$

Verifiquemos si las otras dos ecuaciones del sistema se satisfacen con este valor de t.

- Para la 2^{da} ecuación
$$5-\frac{1}{2}=\frac{10-1}{2}=\frac{9}{2} \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

- Para la 3^{ra} ecuación
$$-1+3\left(\frac{1}{2}\right)=-1+\frac{3}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2} \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

El punto $Q\left(2,\dfrac{9}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ satisface las ecuaciones paramétricas de la recta L, por lo tanto concluimos que el punto **si** pertenece a la recta.

★

Ejemplo 92 *: Determine si el punto* $Q(-3,-1,3)$ *pertenece a la recta* $L : \begin{cases} x=t-2 \\ y=2+3t \\ z=-7-4t \end{cases}$.

Solución : Para determinar si el punto dado pertenece a la recta L, sustituimos dicho punto en la ecuación de la recta para verificar si satisface las igualdades, así,

$$\begin{cases} (-3)=t-2 \\ (-1)=2+3t \\ (3)=-7-4t \end{cases} \quad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \quad t=-3+2 \quad \Longrightarrow \quad t=-1.$$

Verifiquemos si las otras dos ecuaciones del sistema se satisfacen con este valor de t.

- Para la 2^{da} ecuación
$$2+3(-1)=2-3=-1 \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$
- Para la 3^{ra} ecuación
$$-7-4(-1)=-7+4=-3\neq 3 \quad \chi \quad \text{no se cumple.}$$

El punto $Q(-3,-1,3)$ no satisface las ecuaciones paramétricas de la recta L, por lo tanto concluimos que el punto **no** pertenece a la recta. ★

Ejemplo 93 *: Determine el ángulo entre las rectas* $L_1 : \begin{cases} x=1+x \\ y=0 \\ z=-5+2z \end{cases}$ *y* $L_2 : \dfrac{x-3}{2}=y-4=\dfrac{2-z}{2}$.

Solución : Es conocido que el ángulo entre dos rectas es igual al ángulo entre sus vectores directores, así, tenemos que

- Para la recta $L_1 : \begin{cases} x=1+x \\ y=0 \\ z=-5+2z \end{cases}$, el vector director es $\boldsymbol{v_1}=(1,0,2)$.
- Para la recta $L_2 : \dfrac{x-3}{2}=y-4=\dfrac{2-z}{2}$, el vector director es $\boldsymbol{v_2}=(2,1,-2)$.

Entonces, el coseno del ángulo entre los vectores directores de las rectas es
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_1}|\,|\boldsymbol{v_2}|},$$
donde
$$\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}=(1,0,2)\cdot(2,1,-2)=(1)(2)+(0)(1)+(2)(-2)=2-4=-2,$$
mientras que
$$|\boldsymbol{v_1}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$
y
$$|\boldsymbol{v_2}|=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3,$$
por lo tanto,
$$\cos\theta=\frac{-2}{3\sqrt{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta=\arccos\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right).$$
★

Ejemplo 94 *: Determine el ángulo entre las rectas* $L_1 : 2-x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1-z}{3}$ *y* $L_2 : \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1-y}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Solución : Es conocido que el ángulo entre dos rectas es igual al ángulo entre sus vectores directores, así, tenemos que

- Para la recta $2-x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1-z}{3}$, el vector director es $\boldsymbol{v_1}=(-1,2,-3)$.
- Para la recta $L_2 : \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1-y}{4}=\dfrac{z+3}{6}$, el vector director es $\boldsymbol{v_2}=(2,-4,6)$.

Entonces, el coseno del ángulo entre los vectores directores de las rectas es
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}}{|\boldsymbol{v_1}|\,|\boldsymbol{v_2}|},$$

donde
$$\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}=(-1,2,-3)\cdot(2,-4,6)=(-1)(2)+(2)(-4)+(-3)(6)=-2-8-18=-28,$$
mientras que
$$|\boldsymbol{v_1}|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$
y
$$|\boldsymbol{v_2}|=\sqrt{(2)^2+(-4)^2+(6)^2}=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14},$$
por lo tanto,
$$\cos\theta=\frac{-28}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=-\frac{28}{2\left(\sqrt{14}\right)^2}=-1 \qquad\Longrightarrow\qquad \theta=\arccos(-1)=\pi,$$
luego, las rectas son paralelas. ★

Ejemplo 95 *: Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas*
$$L_1: x+3=\frac{1-y}{2}=-\frac{z}{3} \qquad y \qquad L_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}.$$

Solución : Buscamos el punto R que pertenezca a las rectas L_1 y L_2, para ello escribimos las rectas en sus ecuaciones paramétricas e igualamos las respectivas variables
$$L_1:\begin{cases} x=-3+t\\ y=1-2t\\ z=-3t\end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2:\begin{cases} x=1+3s\\ y=1+2s\\ z=1+4s\end{cases},$$
de aquí,
$$\begin{cases} -3+t=1+3s\\ 1-2t=1+2s\\ -3t=1+4s\end{cases} \qquad \overset{\text{de la } 2^{\text{da}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \qquad t=-s,$$
sustituimos en la 1^{ra} ecuación
$$-3+(-s)=1+3s \qquad\Longrightarrow\qquad -4=4s \qquad\Longrightarrow\qquad s=-1,$$
por lo que, $t=-(-1)=1$. Sustituimos el valor de t y de s en la tercera ecuación, $2+4s+3t=0$ para saber si se satisface
$$1+4(-1)+3(1)=1-4+3=0 \quad \checkmark \quad \text{se cumple.}$$

Luego, existe punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2, es decir las rectas se cortan y el punto viene dado por
$$\begin{cases} x=-3+(1)\\ y=1-2(1)\\ z=-3(1)\end{cases} = \begin{cases} x=-2\\ y=-1\\ z=-3\end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad R(-2,-1,-3).$$
★

Ejemplo 96 *: Demuestre que las rectas*
$$L_1: x-2=y-1=-\frac{z}{2} \qquad y \qquad L_2:\frac{x-2}{3}=-\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2}.$$
no son paralelas y no tienen puntos en común.

Demostración : Es conocido que dos rectas, en $\mathbb{R}^3$, son paralelas si sus vectores directores son paralelos

y dos vectores, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos si
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$
puesto que, los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 son
$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, -2) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_2} = (3, -2, 2),$$
respectivamente, entonces
$$\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= ((1)(2) - (-2)(-2))\, \boldsymbol{i} - ((1)(2) - (-2)(3))\, \boldsymbol{j} + ((1)(-2) - (1)(3))\, \boldsymbol{k}$$
$$= -2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} = (-2, -8, -5) \neq (0, 0, 0) = \boldsymbol{0},$$
por lo tanto, las rectas dadas **NO** son paralelas.

Buscamos el punto R que pertenezca a las rectas L_1 y L_2, para ello escribimos las rectas en sus ecuaciones paramétricas e igualamos las respectivas variables
$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = -2s \\ z = 2 + 2s \end{cases},$$
de aquí,
$$\begin{cases} 2 + t = 2 + 3s \\ 1 + t = -2s \\ -2t = 2 + 2s \end{cases} \qquad \overset{\text{de la } 1^{\text{ra}} \text{ ecuación}}{\Longrightarrow} \qquad t = 3s,$$
sustituimos en la 2^{da} ecuación
$$1 + (3s) = -2s \qquad \Longrightarrow \qquad 5s = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad s = -\frac{1}{5},$$
por lo que, $t = 3\left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{3}{5}$. Sustituimos el valor de t y de s en la tercera ecuación, $2 + 2s + 2t = 0$ para saber si se satisface
$$2 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{3}{5}\right) = 2 - \frac{2}{5} - \frac{6}{5} = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \qquad \chi \qquad \text{no se cumple.}$$

Luego, **NO** existe punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2, es decir las rectas no se cortan. ★

Ejemplo 97 : *Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas*
$$L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3 - z}{2} \qquad y \qquad L_2 : x + 1 = \frac{y - 4}{2} = \frac{1 - z}{3}.$$

Solución : En primer lugar, veamos si las rectas se cortan o se cruzan, si se cortan, entonces hay un punto común entre ellas, en caso contrario, es decir, si se cruzan, entonces no tienen punto en común.

Es conocido que si

- L_1 es una recta que pasa por el punto P_1 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_1}$.

- L_2 es una recta que pasa por el punto P_2 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_2}$,

entonces

- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$, se tiene que las rectas se cortan.
- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \neq 0$, se tiene que las rectas se cruzan.

Así,

1. Para la recta $L_1 : x - 2 = y - 1 = \dfrac{3-z}{2}$. El vector director es $\boldsymbol{v_1} = (2, 1, -2)$ y pasa por el punto $P_1\,(2, 1, 3)$.
2. Para la recta $L_2 : x + 1 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{1-z}{3}$. El vector director es $\boldsymbol{v_2} = (1, 2, -3)$ y pasa por el punto $P_2\,(-1, 4, 1)$.

Entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 4, 1) - (2, 1, 3) = (-3, 3, -2)\,,$$

con lo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\,(-3 - (-4)) - (3)\,(-6 - (-2)) + (-2)\,(2 - 2) = -3 + 12 + 0 = 9 \neq 0,$$

concluimos que las rectas se cruzan, por lo tanto **NO** tienen punto de intersección. ★

Ejemplo 98 *: Demuestre que las siguientes rectas se cruzan*

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3-z}{2} \qquad y \qquad L_2 : x + 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{3}.$$

Demostración : Es conocido que si

- L_1 es una recta que pasa por el punto P_1 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_1}$.
- L_2 es una recta que pasa por el punto P_2 y tiene como vector director a $\boldsymbol{v_2}$,

entonces

- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0$, se tiene que las rectas se cortan.
- Si $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \neq 0$, se tiene que las rectas se cruzan.

Así,

1. Para la recta $L_1 : x - 2 = y - 1 = \dfrac{3-z}{2}$. El vector director es $\boldsymbol{v_1} = (2, 1, -2)$ y pasa por el punto $P_1\,(2, 1, 3)$.
2. Para la recta $L_2 : x + 1 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{1-z}{3}$. El vector director es $\boldsymbol{v_2} = (1, 2, -3)$ y pasa por el punto $P_2\,(-1, 4, 1)$.

Entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 4, 1) - (2, 1, 3) = (-3, 3, -2)\,,$$

con lo que

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-3)(-3-(-4))-(3)(-6-(-2))+(-2)(2-2)=-3+12+0=9\neq 0,$$

concluimos que las rectas se cruzan. ★

Ejemplo 99 *: Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto* $P(-2,1,2)$ *y es paralela a la recta* $L:\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{y+2}{2},\quad z=3.$

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo $P(-2,1,2)$.
- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, puesto que, la recta buscada tiene que ser paralela a la recta L, entonces el vector director de la recta buscada es el vector director de la recta dada, $\boldsymbol{v}=(-3,2,0)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son

$$L:\begin{cases} x-(-2)=-3t \\ y-1=2t \\ z-6=0 \end{cases} = \begin{cases} x=-2-3t \\ y=1+2t \\ z=6 \end{cases}$$

y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,

$$L:\begin{cases} x-(-2)=-3t \\ y-1=2t \\ z-6=0 \end{cases} = \begin{cases} t=\dfrac{x+2}{-3} \\ t=\dfrac{y-1}{2} \\ z=6 \end{cases}$$

por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por

$$\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2},\quad z=6 \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{x+2}{3}=\frac{1-y}{2},\quad z=6.$$

★

Ejemplo 100 *: Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto* $P(0,-3,5)$ *y es perpendicular a las rectas*

$$L_1:\begin{cases} x=-2-3t \\ y=5t \\ z=1-2t \end{cases} \qquad y \qquad L_2: 3-x=\frac{y-3}{2}=\frac{4-z}{2}.$$

Solución : Para escribir las ecuaciones de una recta, en $\mathbb{R}^3$, necesitamos conocer:

- Las coordenadas de un punto por donde pasa la recta. En este ejemplo $P(0,-3,5)$.

- El vector director. Este vector tiene que ser paralelo a la recta buscada, puesto que, la recta buscada debe ser perpendicular a las rectas L_1 y L_2, buscamos un vector que sea paralelo a la recta buscada, es decir, perpendicular a las rectas dadas, por lo tanto perpendicular a sus vectores directores, es conocido que un vector perpendicular a dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ viene dado por su producto vectorial $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

  Los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 son
  $$\boldsymbol{v_1} = (-3, 5, -2) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_2} = (-1, 2, -2),$$
  respectivamente, entonces
  $$\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
  $$= ((5)(-2) - (-2)(2))\,\boldsymbol{i} - ((-3)(-2) - (-2)(-1))\,\boldsymbol{j} + ((-3)(2) - (5)(-1))\,\boldsymbol{k}$$
  $$= -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} = (-6, -4, -1),$$
  entonces el vector director de la recta buscada es $\boldsymbol{v} = (-6, -4, -1)$ o cualquier vector múltiplo escalar de él, por ejemplo $\boldsymbol{a} = (6, 4, 1)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta buscada son
$$L : \begin{cases} x - 0 = 6t \\ y - (-3) = 4t \\ z - 5 = t \end{cases} = \begin{cases} x = 6t \\ y = -3 + 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$$
y la ecuación forma simétrica se obtiene despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas de la recta, así,
$$L : \begin{cases} x = 6t \\ y - (-3) = 4t \\ z - 5 = t \end{cases} = \begin{cases} t = \dfrac{x}{6} \\ t = \dfrac{y+3}{4} \\ t = z - 5 \end{cases}$$
por lo que la ecuación forma simétrica viene dada por
$$\frac{x}{6} = \frac{y+3}{4} = z - 5.$$

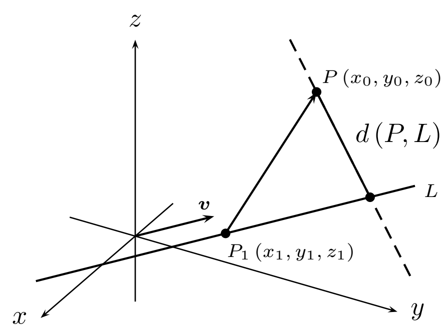
★

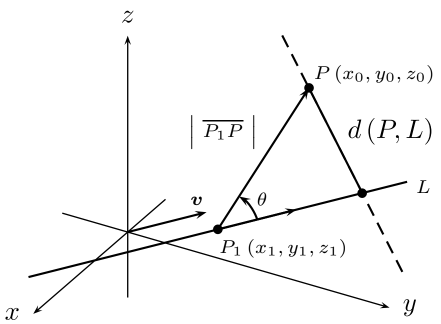
Ejemplo 101 : *Demostrar que la distancia entre la recta* $L : \boldsymbol{x} = \overline{OP_1} + \boldsymbol{v}t$ *y el punto* P, *que no pertenece a la recta, viene dada por*
$$d(P, L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Demostración : La distancia entre

- Una recta L, que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ con vector director $\boldsymbol{v}$.
- Un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, que no pertenece a la recta,

la cual denotamos por $d(P, L)$, se obtiene sobre la recta perpendicular a L que pasa por el punto P.





Si θ es el ángulo entre el vector $\overline{P_1P}$ y el vector director, $\boldsymbol{v}$, de la recta L, entonces, por trigonométria

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d(L,P)}{\left|\ \overline{P_1P}\ \right|},$$

por lo que,

$$d(P,L) = \left|\ \overline{P_1P}\ \right| \operatorname{sen}\theta.$$

Por otra parte, es conocido que

$$\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right| = \left|\ \overline{P_1P}\ \right| |\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}\theta,$$

despejamos $\operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{\left|\ \overline{P_1P}\ \right| |\boldsymbol{v}|},$$

por lo tanto,

$$d(P,L) = \left|\ \overline{P_1P}\ \right| \operatorname{sen}\theta = \left|\ \overline{P_1P}\ \right| \ \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{\left|\ \overline{P_1P}\ \right| |\boldsymbol{v}|} = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Luego,

$$\boxed{d(P,L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.}$$

★

Ejemplo 102 *: Hallar la distancia entre la recta* $L : \dfrac{x-3}{3} = y+2, \ \ z = 4$ *y el punto* $P(-2,1,1)$.

Solución : Por el ejemplo 101, se tiene que

$$d(P,L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|},$$

donde P_1 es el punto por donde pasa la recta dada y $\boldsymbol{v}$ su vector director.

De la recta L se tiene que $P_1(3,-2,4)$ y el vector director viene dado por $\boldsymbol{v} = (3,1,0)$, así,

$$\overline{P_1P} = (-2,1,1) - (3,-2,4) = (-5,3,-3),$$

de aquí,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= ((3)(0) - (-3)(1))\, \boldsymbol{i} - ((-5)(0) - (-3)(3))\, \boldsymbol{j} + ((-5)(1) - (3)(3))\, \boldsymbol{k}$$

$$= 3\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k} = (3,-9,-11),$$

es decir,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = (3,-9,-11).$$

Calculamos las longitudes de los vectores $\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(3)^2 + (9)^2 + (11)^2} = \sqrt{211}, \qquad \text{y} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{10},$$

entonces

$$d(P, L) = \frac{\sqrt{211}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2110}}{10}.$$

★

Ejemplo 103 *: Hallar la distancia entre la recta* $L : \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{7} = 4 - z$, *y el punto* $P(8, 12, 2)$.

Solución : Por el ejemplo 101, se tiene que

$$d(P, L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|},$$

donde P_1 es el punto por donde pasa la recta dada y $\boldsymbol{v}$ su vector director.

De la recta L se tiene que $P_1(-2, -2, 4)$ y el vector director viene dado por $\boldsymbol{v} = (5, 7, -1)$, así,

$$\overline{P_1P} = (8, 12, 2) - (-2, -2, 4) = (10, 14, -2),$$

de aquí,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 10 & 14 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= ((14)(-1) - (-2)(7))\,\boldsymbol{i} - ((10)(-1) - (-2)(5))\,\boldsymbol{j} + ((10)(7) - (14)(5))\,\boldsymbol{k}$$

$$= 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = (0, 0, 0),$$

es decir,

$$\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v} = (0, 0, 0),$$

de aquí,

$$\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 0,$$

entonces

$$d(P, L) = 0,$$

con lo que concluimos que el punto P pertenece a la recta L. ★

Ejemplo 104 *: Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto* $P(1, 2, 3)$ *y tiene como vector normal a* $\boldsymbol{n} = (-1, 4, 2)$.

Solución : Sea $Q(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano buscado, consideramos, el vector

$$\overline{PQ} = (x - 1, y - 2, z - 3),$$

el cual pertenece al plano y por ende, es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (-1, 4, 2)$, entonces, se satisface

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{PQ} = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad (-1, 4, 2) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3) = 0,$$

resolvemos,

$$(-1)(x - 1) + (4)(y - 2) + (2)(z - 3) = 0,$$

de aquí,

$$-x + 1 + 4y - 8 + 2z - 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -x + 4y + 2z = 13.$$

Luego, la ecuación del plano buscado es

$$\boxed{\pi : -x + 4y + 2z = 13.}$$

★

Ejemplo 105 *: Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos* $P(1,-2,0)$, $Q(2,1,-1)$ *y* $R(3,0,-3)$.

Solución : Buscamos la ecuación del plano, π, que contiene a los puntos P, Q y R, es conocido que, para obtener la ecuación de un plano se debe conocer

- El vector normal al plano, es decir, un vector perpendicular al plano.
- Un punto por donde pasa el plano, en este ejemplo podemos considerar cualquiera de los tres puntos dados, P, Q o R, para escribir la ecuación del plano.

Consideremos los vectores $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, es decir, los vectores

$$\overline{PQ} = \overline{0Q} - \overline{0P} = (2,1,-1) - (1,-2,0) = (1,3,-1)$$

y

$$\overline{QR} = \overline{0R} - \overline{0Q} = (3,0,-3) - (2,1,-1) = (1,-1,-2),$$

los cuales pertenecen al plano buscado, π.

Es conocido que el vector dado por $\overline{PQ} \times \overline{QR}$, es un vector perpendicular tanto al vector $\overline{PQ}$, como al vector $\overline{QR}$, como estos vectores pertenecen al plano, entonces, el vector $\overline{PQ} \times \overline{QR}$, es perpendicular al plano, así, el vector normal al plano buscado es $\boldsymbol{n} = \overline{PQ} \times \overline{QR}$ o un múltiplo escalar de él.

$$\boldsymbol{n} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= ((3)(-2) - (-1)(-1))\,\boldsymbol{i} - ((1)(-2) - (-1)(1))\,\boldsymbol{j} + ((1)(-1) - (3)(1))\,\boldsymbol{k}$$

$$= -7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = (-7,1,-4),$$

es decir,

$$\boldsymbol{n} = (-7,1,-4),$$

o, equivalentemente, cualquier múltiplo escalar de él.

Sea $B(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano buscado, tomamos el punto $P(1,-2,0)$, para obtener la ecuación del plano π, consideramos el vector

$$\overline{PB} = (x-1, y-(-2), z-0) = (x-3, y+2, z),$$

el cual pertenece al plano y por ende, es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (-7,1,-4)$, entonces, se satisface

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{PB} = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad (-7,1,-4) \cdot (x-1, y+2, z) = 0,$$

resolvemos,

$$(-7)(x-1) + (1)(y+2) + (-4)(z) = 0,$$

de aquí,

$$-7x+7+y+2-4z=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 7x-y+4z=9.$$

Luego, la ecuación del plano buscado es

$$\boxed{\pi : 7x-y+4z=9.}$$

★

Ejemplo 106 *: Escribir las ecuación del plano que contiene las rectas*

$$L_1 : \boldsymbol{x}=(3,1,2)+t\,(1,-1,2) \qquad y \qquad L_2 : \boldsymbol{x}=(3,1,2)+t\,(3,2,-1)\,.$$

Solución : Es conocido que, para obtener la ecuación de un plano se debe conocer

- El vector normal al plano, es decir, un vector perpendicular al plano.
- Un punto por donde pasa el plano.

Calculamos el vector normal del plano buscado, π, es decir, debemos hallar un vector que sea perpendicular al plano, puesto que, las rectas L_1 y L_2 están contenidas en el plano buscado, π, entonces sus vectores directores son paralelos a π, por lo tanto, el producto vectorial entre esos vectores directores es perpendicular a ellos y por ende al plano π.

Calculamos el producto vectorial entre el vector director de la recta L_1, $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$, y el vector director de la recta L_2, $\boldsymbol{b}=(3,2,-1)$,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-3,7,5)\,,$$

por lo dicho anteriormente, este vector es perpendicular tanto al vector director $\boldsymbol{a}$ como al vector director $\boldsymbol{b}$, así, el vector normal al plano que contiene a las dos rectas es

$$\boldsymbol{n}=(-3,7,5)\,,$$

luego, la ecuación del plano viene dada por

$$-3\,(x-3)+7\,(y-1)+5\,(z-2)=0,$$

es decir,

$$\boxed{\pi : -3x+7y+5z=8.}$$

★

Ejemplo 107 *: Hallar el punto o los puntos, si existen, de intersección entre los planos*

$$\pi_1 : 2x-3y-4z=2 \qquad y \qquad \pi_2 : x+4y-5z=0.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=2 \\ \;\; x+4y-5z=0 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 2 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \ : \ -11y+6z=2 \\ \text{De la primera fila} \ : \ x+4y-5z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} \boxed{y=\dfrac{6}{11}\,z-\dfrac{2}{11}.} \\ x+4y-5z=0 \end{cases}$$

$$\implies x+4\left(\frac{6}{11}\,z-\frac{2}{11}\right)-5z=0 \implies x+\frac{24}{11}\,z-\frac{8}{11}-5z=0$$

$$\implies x-\frac{31}{11}\,z-\frac{8}{11}=0 \implies \boxed{x=\frac{8}{11}+\frac{31}{11}\,z.}$$

Así, los planos se intersectan en los puntos $P(x,y,z)$ de la forma

$$P\begin{pmatrix} \dfrac{8}{11}+\dfrac{31}{11}\,z \\ \dfrac{6}{11}\,z-\dfrac{2}{11} \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad z \in \mathbb{R},$$

es decir, si $z=t$, entonces los planos tienen como intersección una recta, L, de ecuaciones paramétricas

$$L: \begin{cases} x=\dfrac{8}{11}+\dfrac{31}{11}\,t \\ y=-\dfrac{2}{11}+\dfrac{6}{11}\,t \\ z=t. \end{cases}$$

★

Ejemplo 108 *: Hallar la intersección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1 : -4x+2y+4z=1, \qquad \pi_2 : 6x-2y-5z=0 \qquad y \qquad \pi_3 : -6x+4y+7z=3.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} -4x+2y+4z=1 \\ 6x-2y-5z=0 \\ -6x+4y+7z=3 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1\to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-6F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\begin{cases} \text{De la segunda fila} \ : \ y+z=\dfrac{3}{2} \\ \\ \text{De la primera fila} \ : \ x-\dfrac{1}{2}\,y-z=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} \boxed{z=\dfrac{3}{2}-y} \\ \\ x-\dfrac{1}{2}\,y-z=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\implies \quad x-\frac{1}{2}\,y-\left(\frac{3}{2}-y\right)=-\frac{1}{4} \quad \implies \quad x+\frac{1}{2}\,y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$\implies \quad x=-\frac{1}{2}\,y-\frac{1}{4}+\frac{3}{2} \quad \implies \quad \boxed{x=-\frac{1}{2}\,y+\frac{5}{4}.}$$

Así, los planos se intersectan en los puntos $P(x,y,z)$ de la forma

$$P\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\,y+\dfrac{5}{4} \\ y \\ \dfrac{3}{2}-y \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad y\in\mathbb{R},$$

es decir, si $y=t$, entonces los planos tienen como intersección una recta, L, de ecuaciones paramétricas

$$L:\begin{cases} x=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}\,t \\ y=t \\ z=\dfrac{3}{2}-t. \end{cases}$$

★

Ejemplo 109 *: Hallar la intersección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1: 3x+6y-2z=1, \qquad \pi_2: x+y-3z=6 \qquad y \qquad \pi_3: 2x+2y-6z=5.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 3x+6y-2z=1 \\ x+\ y-3z=6 \\ 2x+2y-6z=5 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Observemos la última fila de esta matriz, se tiene que

$$0x+0y+0z=-7 \qquad \Longrightarrow \qquad 0=-7 \quad \leftarrow \quad \text{No tiene sentido, contradicción.}$$

Por lo que concluimos que el sistema **no tiene solución**, es decir, los tres planos **NO** se intersectan. ★

Ejemplo 110 *: Hallar la intersección, si existe, entre los planos*

$$\pi_1 : 2x+5y-z=1, \qquad \pi_2 : 7y-2z=-1 \qquad y \qquad \pi_3 : -x+3y-z=2.$$

Solución : Para obtener la intersección entre los tres planos resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 2x+5y-\ z=\ 1 \\ 7y-2z=-1 \\ -x+3y-\ z=\ 2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3\to F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2\to F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-11F_2+F_3\to F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{7} & \dfrac{46}{7} \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{De la tercera fila } : \ \dfrac{1}{7}\,z = \dfrac{46}{7} \\ \text{De la segunda fila } : \ y - \dfrac{2}{7}\,z = -\dfrac{1}{7} \\ \text{De la primera fila } : \ x - 3y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z = 46} \\ y - \dfrac{2}{7}\,z = -\dfrac{1}{7} \\ x - 3y + z = 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - \dfrac{2}{7}\,(46) = -\dfrac{1}{7} \\ x - 3y + (46) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{92}{7} - \dfrac{1}{7} \\ x - 3y = 2 - 46 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y = 13} \\ z - 3y = -44 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad x - 3\,(13) = -44 \quad \Longrightarrow \quad x = 39 - 44 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = -5.}$$

La solución del sistema es el punto $P\,(-5, 13, 46)$, es decir, los planos se intersectan en un punto. ★

Ejemplo 111 *: Hallar el valor o los valores de la constante λ para que los planos*

$$\pi_1 : x + 3y + z = 2, \qquad \pi_2 : x + 2y - 5z = 4 \qquad y \qquad \pi_3 : 2x + 5y - \lambda^2 z = \lambda + 4.$$

1. *Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.*
2. *Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.*
3. *No tenga puntos en común.*

Solución : Para conocer el valor o los valores de λ, resolvemos el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x + 3y + \quad z = 2 \\ x + 2y - \ 5z = 4 \\ 2x + 5y - \lambda^2 z = \lambda + 4. \end{array}\right.$$

Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \lambda + 4 \end{pmatrix},$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{-F_1+F_2 \to F_2 \\ -2F_1+F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda^2 & \lambda-2 \end{array}\right),$$

es decir, la matriz se puede escribir como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de λ, (± 2).

(a) Si $\lambda \neq \pm 2$, tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2-\lambda} F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & \dfrac{\lambda-2}{2-\lambda} \end{array}\right),$$

de aquí,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{De la primera fila} : & x+3y+z=2 \\ \text{De la segunda fila} : & y+6z=-2 \\ \text{De la tercera fila} : & (2+\lambda)z=-1. \end{cases}.$$

- Como $\lambda \neq -2$, entonces despejamos z de la ecuación dada por la tercera fila, se tiene

$$(2+\lambda)z = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z = -\frac{1}{2+\lambda}.}$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y+6z=-2 \quad \Longrightarrow \quad y = -2-6\left(-\frac{1}{2+\lambda}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = -2+\frac{6}{2+\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{-2(2+\lambda)+6}{2+\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}.}$$

- De la primera fila, se tiene

$$x+3y+z=2 \implies x = 2-3\left(-\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}\right)-\left(-\frac{1}{\lambda+2}\right)$$

$$\implies x = 2+\frac{6(\lambda-1)}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda+2} \implies x=\frac{2(\lambda+2)+6(\lambda-1)+1}{\lambda+2}$$

$$\implies x=\frac{2\lambda+4+6\lambda-6+1}{\lambda+2} \implies \boxed{x=\frac{8\lambda-1}{\lambda+2},}$$

por lo tanto, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8\lambda-1}{\lambda+2} \\ -\dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2} \\ -\dfrac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix},$$

es decir, los planos se intersectan en un solo punto.

(b) Si $\lambda=2$, la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right)$$

queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(2))(2+(2)) & (2)-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de aquí, concluimos que el sistema tiene infinitas soluciones, hallamos dichas soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \left\{ \begin{array}{ll} \text{De la primera fila} & : \ x+3y+z=2 \\ \text{De la segunda fila} & : \ y+6z=-2. \end{array} \right. .$$

- De la segunda fila, se tiene

$$y+6z=-2 \implies \boxed{y=-2-6z.}$$

- De la tercera fila, se tiene

$$x+3y+z=2 \implies x=2-3(-2-6z)-z \implies \boxed{x=17z+8.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z+8 \\ -6z-2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z\in\mathbb{R},$$

es decir, los planos se intersectan en un recta de ecuaciones paramétricas

$$L : \begin{cases} x = 8 + 17t \\ y = -2 - 6t \\ z = t. \end{cases}$$

(c) Si $\lambda = -2$, la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda - 2 \end{array} \right)$$

queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-(-2))(2+(-2)) & (-2) - 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right),$$

de la tercera fila se tiene

$$0x + 0y + 0z = -4 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = -4,$$

lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, los plano **NO** se intersectan. ★

Ejemplo 112 *: Hallar el valor o los valores de las constantes a y b para que los planos*

$$\pi_1 : 3x - 4y + 7z = b - 11, \qquad \pi_2 : x - y + 2z = -3,$$

$$\pi_3 : 2x - y + 3z = -4, \qquad \pi_4 : -x + 3y + (a-4)z = b + 7.$$

1. *Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.*
2. *Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.*
3. *No tenga puntos en común.*

Solución : Para conocer el valor o los valores de a y b, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y + 7z = b - 11 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ -x + 3y + (a-4)z = b + 7. \end{cases}$$

Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & a-4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b - 11 \\ -3 \\ -4 \\ b + 7 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left(A \mid \overline{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b - 11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b + 7 \end{array} \right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1+F_4\to F_4]{\substack{-3F_1+F_2\to F_2 \\ -2F_1+F_3\to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-F_2+F_3\to F_3 \\ -2F_2+F_4\to F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 3b \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Estudiamos los casos según los posibles valores de a y b.

(i) Si $b=0$ y $a\neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & a & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

- De la fila 3, se tiene

$$az=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z=0.}$$

- De la fila 2, se tiene

$$y-z=2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y=2.}$$

- De la fila 1, se tiene

$$x-y+2z=-3 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x=-1.}$$

Así, la única solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, los planos tiene un punto en común, $P(-1,2,0)$.

(ii) Si $b = 0$ y $a = 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-(0) \\ 0 & 0 & (0) & 3\,(0) \\ 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dada por

- De la fila 2, se tiene:

$$y - z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{y = 2 + z.}$$

- De la fila 1, se tiene:

$$x - y + 2z = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -3 + (2+z) - 2z \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x = -z - 1.}$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Entonces, los planos se intersectan en la recta L de ecuaciones paramétricas

$$L : \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases}.$$

(iii) Si $b \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right),$$

entonces, de la fila 4 se tiene

$$0x + 0y + 0z = b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = b,$$

lo cual es una contradicción, por lo que el sistema no tiene solución. Los planos **NO** se intersectan. ★

Ejemplo 113 *: Sean la recta* $L_1 : \dfrac{9-3x}{6} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-2}{4}$ *y el plano* $\pi_1 : 3x - 2y + 6z = -5$.

1. *Hallar la ecuación de la recta* L_2 *perpendicular al plano* π_1 *y que pasa por el origen.*
2. *Hallar la ecuación del plano* π_2 *que contiene a la recta* L_1 *y que pasa por el origen.*

Solución : *a.* Tenemos que si L_2 es perpendicular al plano π_1, entonces su vector director debe ser múltiplo escalar del vector director del plano π_1, el cual es $\boldsymbol{n} = (3, -2, 6)$. Luego, las ecuaciones paramétricas de la recta deseada son

$$x = 3t; \qquad y = -2t; \qquad z = 6t.$$

b. El plano deseado contiene a la recta de vector director $\boldsymbol{a} = (-2, -2, 4)$ que es paralelo al vector

$$\boldsymbol{b} = (-1, -1, 2).$$

Generamos el vector de coordenadas $\overline{\boldsymbol{OP}}$, donde $P(3, 1, 2)$, es decir $\overline{\boldsymbol{OP}} = (3, 1, 2)$.

El vector normal al plano buscado es $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \overline{\boldsymbol{OP}}$, el cual es

$$\boldsymbol{n} = (-1, -1, 2) \times (3, 1, 2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4, 8, 2)$$

es equivalente a $\boldsymbol{n} = (-2, 4, 1)$.

La ecuación del plano que contiene a la recta L_1 y pasa por el origen es

$$-2x + 4y + z = 0.$$

★

Ejemplo 114 : *Hallar la ecuación del plano que pasa por* $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$ *y cuyo vector normal tiene longitud* 2 *y dos de sus ángulos directores son* $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *y* $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Solución : Es conocido que, todo vector se puede escribir como

$$\boldsymbol{a} = (|a| \cos\alpha, |a| \cos\beta, |a| \cos\gamma),$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$ y $|a|$ es su longitud. Por otra parte

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1.$$

Puesto que, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$, entonces

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\theta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\theta = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{4},$$

así, $\theta = \frac{\pi}{3}$, por lo tanto

$$n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1, 1\right).$$

La ecuación del plano buscado es

$$\pi : \left(\sqrt{2}, 1, 1\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - 1, z + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}x + y + z = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

★

Ejercicios

1. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P dado y tiene al vector $\boldsymbol{v}$ como vector director

   1. $P(0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)$
   2. $P(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, 0)$
   3. $P(2, -4, -7)$, $\boldsymbol{v} = (3, 1, 2)$.

2. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2, 1, 6)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 2)$.

3. Determine las ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta que pasa por los puntos $P(2,1,6)$ y $Q(-2,1,2)$.

4. Describa los vectores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales al vector $(3,-1)$. Verifique que éstos son los puntos de una recta que pasa por el origen y halle sus ecuaciones paramétricas..

5. Escribir la ecuación vectorial de la recta, en $\mathbb{R}^2$, definida por la ecuación cartesiana $2x + y = -3$..

6. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,1,1)$ y es paralela al vector que une P con el punto $Q(2,-3,-5)$..

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene al vector posición asociado a P por vector director..

8. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados

   1. $P(3,9,7)$, $Q(-1,2,5)$ 2. $P(2,1,6)$, $Q(-2,3,2)$ 3. $P(0,0,0)$, $Q(2,6,5)$

9. Determine si el punto $Q\left(2, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la recta $L : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

10. Determine si el punto $Q(-3,-1,3)$ pertenece a la recta $L : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2 + 3t \\ z = -7 - 4t \end{cases}$.

11. Determinar si el punto P dado pertenece a la recta L dada.

    a. $P(-5,7,9)$, $L : (x,y,z) = (4,-2,3) + s(-3,3,1)$.

    b. $P\left(-1, 7, \frac{3}{2}\right)$, $L : (x,y,z) = (-1,1,3) + t(0,4,-1)$.

12. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(1,4,1)$ y es paralela a la recta

$$L : (x,y,z) = (4,2,0) + t(3,0,-1).$$

13. Hallar la ecuación forma simétrica de la recta L_1 que contiene al punto $(-1,2,1)$ y es paralela a la recta

$$L_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$$

14. Hallar la ecuación forma simétrica de la recta L que pasa por el punto $(1,-2,4)$, es paralela a la recta

$$L_1 : \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

y también paralela al eje z.

15. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-4,7,3)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1 : \frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+3}{-2}.$$

16. Los vectores $\boldsymbol{v_1} = (-1, -6, 7)$ y $\boldsymbol{v_2} = (3, 2, -4)$ son los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 respectivamente. Encuentre un vector director para la recta L, si se sabe que ella es perpendicular, tanto a L_1 como a L_2.

17. Determine el ángulo entre las rectas $L_1 : \begin{cases} x = 1 + x \\ y = 0 \\ z = -5 + 2z \end{cases}$ y $L_2 : \dfrac{x-3}{2} = y - 4 = \dfrac{2-z}{2}$.

18. Determine el ángulo entre las rectas $L_1 : 2 - x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ y $L_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

19. Hallar el ángulo formado por las rectas

$$L_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

20. La recta L_1 pasa por los puntos $A(-6, -1, 3)$, $B(-3, 2, 7)$ y la recta L_2 pasa por los puntos $C(4, 2, 1)$, $D(2, 3, -5)$. Encuentre la medida del ángulo agudo formado por L_1 y L_2.

21. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas

$$L_1 : x + 3 = \frac{1-y}{2} = -\frac{z}{3} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

22. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de la recta L_1 que pasa por los puntos $A(3, -5, 2)$ y $B(11, -3, 6)$ con la recta L_2 que pasa por los puntos $C(5, -3, 2)$ y $D(9, -5, 6)$.

23. Sean L_1 la recta que contiene al punto $A(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por $B(-2, 2, 0)$ y $C(4, -1, 7)$ y L_2 la recta que pasa por $E(1, -1, 8)$ y $F(10, -1, 11)$. Demuestre que L_1 y L_2 se cortan y encuentre las coordenadas del punto de intersección.

24. Demuestre que las rectas

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = -\frac{z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \frac{x-2}{3} = -\frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

no son paralelas y no tienen puntos en común.

25. Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3-z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2 : x + 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{3}.$$

26. Demuestre que las siguientes rectas se cruzan

$$L_1 : x - 2 = y - 1 = \frac{3-z}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2 : x + 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{1-z}{3}.$$

27. Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto $P(-2, 1, 2)$ y es paralela a la recta $L : \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+2}{2}$, $z = 3$.

28. Hallar las ecuaciones paramétricas y forma simétricas de la recta que pasa por el punto $P(0, -3, 5)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : 3 - x = \frac{y-3}{2} = \frac{4-z}{2}.$$

29. Demostrar que la distancia entre la recta $L : \boldsymbol{x} = \overline{OP_1} + \boldsymbol{v}t$ y el punto P, que no pertenece a la recta, viene dada por
$$d(P, L) = \frac{\left|\overline{P_1P} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

30. Hallar la distancia entre la recta $L : \dfrac{x-3}{3} = y + 2, \;\; z = 4$ y el punto $P(-2, 1, 1)$.

31. Hallar la distancia entre la recta $L : \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{7} = 4 - z,$ y el punto $P(8, 12, 2)$.

32. Demostrar que la distancia entre las rectas, que se cruzan,
$$L_1 : \boldsymbol{x} = \overline{OP_1} + \boldsymbol{v_1}t \qquad \text{y} \qquad L_2 : \boldsymbol{x} = \overline{OP_2} + \boldsymbol{v_2}t,$$
la cual denotamos por $d(L_1, L_2)$, viene dada por
$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\overline{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2})\right|}{|\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2}|}.$$

33. Una recta L_1 pasa por los puntos $A(2, 2, -1)$ y $B(5, -1, 3)$ y otra L_2 pasa por el punto $C(-4, 2, -6)$ y $P(x, y, z)$ cuya coordenada x es 2. Encuentre las otras coordenadas de P si L_1 es paralela a L_2.

34. Sea $\boldsymbol{u} = (3, -1, 2)$ y la recta $L : x = \dfrac{y}{2} = -z$. Calcular el módulo de la proyección de $\boldsymbol{u}$ en la dirección de la recta.

35. Escriba las ecuaciones de los planos coordenados de $\mathbb{R}^3$.

36. Hallar las coordenadas del punto $P(x, y, z)$ donde la recta, que pasa por los puntos $A(3, -2, 7)$ y $B(13, 3, -8)$, intersecta al plano xz.

37. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P y tiene al vector $\boldsymbol{n}$ como vector normal

    1. $P(0, 0, 0)$, $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ 2. $P(2, 1, 1)$, $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ 3. $P(3, 4, 5)$, $\boldsymbol{n} = (0, 2, 3)$
    4. $P(2, -1, 0)$, $\boldsymbol{n} = (3, 2, 6)$ 5. $P(0, 2, 0)$, $\boldsymbol{n} = (-2, -7, 4)$

38. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene al vector posición asociado a P con vector normal.

39. Considere los puntos $P(1, -1, 3)$, $Q(3, 2, 1)$. Hallar la ecuación del plano

    (a) que pasa por P y tiene a $\boldsymbol{n} = P - Q$ por vector normal.
    (b) que pasa por Q y tiene a $\boldsymbol{n} = Q - P$ por vector normal.

40. Determine si los puntos P y Q pertenecen al plano dado

    1. $3x - y + z = 1$, $P(0, 0, 1)$, $Q(1, 1, -1)$ 2. $z = 3$, $P(3, 1, 3)$, $Q(3, 3, 5)$
    3. $x + y - 4z = 0$, $P(0, 0, 0)$, $Q(2, 2, 1)$ 4. $3x - 2y = 0$, $P(2, 1, 1)$, $Q(-3, 2, 5)$
    5. $x + y - 2z = 10$, $P(5, 7, 2)$, $Q(5, 7, 1)$

41. Determine un punto por el que pasa el plano dado y un vector normal a él

    1. $3x + z = 3$ 2. $y = 0$ 3. $x - y - z = 5$ 4. $3x - 2y + 7z = 23$

42. Determine si los planos dados son paralelos, perpendiculares, o si no están en ninguno de estos dos casos.

    1. $3x + y - z = 3$; $z - y = 8$ 2. $x + 4y - 2z = 1$; $2x + 8y - 4z = 7$
    3. $x - y + z = 1$; $x - y + z = 9$ 4. $x = 0$; $z = 0$ 5. $y = 3$; $y = 7$

43. Determine la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados

    1. $P(0,0,0)$, $Q(3,1,1)$, $R(-1,2,4)$
    2. $P(2,1,0)$, $Q(0,0,7)$, $R(2,1,1)$
    3. $P(1,-1,-1)$, $Q(8,4,2)$, $R(2,1,5)$
    4. $P(1,4,9)$, $Q(-3,1,5)$, $R(4,4,11)$
    5. $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$

44. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$, tal que, los vectores no colineales $\boldsymbol{u}=(a_1,b_1,c_1)$, $\boldsymbol{v}=(a_2,b_2,c_2)$ son paralelos a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

45. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por los puntos $P(x_0,y_0,z_0)$, y $Q(x_1,y_1,z_1)$ tal que, el vector $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$ es un vector paralelo a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

46. Escribir las ecuaciones de los planos que contienen el punto $(2,1,1)$, son perpendiculares al plano xz y forman un ángulo igual a $\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)$ con el plano $2x-y+2z-3=0$.

47. Sean los planos

$$\pi_1 : x+z=0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 2x-4y+4z=3$$

y las rectas

$$L_1 : -x-7=1-y=z \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x+8+t=0 \\ y+2=t \\ z+t=3 \end{cases}$$

   (a) Hallar la ecuación de la recta L que es paralela a los planos dados y que pasa por el punto de intersección de las rectas.
   (b) Calcular la distancia de L_2 al origen.
   (c) Encontrar el ángulo formado por los planos.

48. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P_1(1,-1,1)$, es ortogonal a la recta $3x=2y=z$ y es paralela al plano $\pi : x+y-z=0$.

49. Sean las rectas $L_1 : 3-x=\dfrac{4-y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ y $L_2 : \dfrac{x+2}{4}=y=\dfrac{2z-1}{5}$ y los planos $\pi_1 : x+2y-z=4$ y $\pi_2 : 3x+8y+z=0$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y es perpendicular a la recta intersección de los planos.

50. El punto $P(1,2,3)$ se encuentra en el plano $x+y-z=0$. Determine la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por P y que se encuentran sobre el plano dado.

51. Determinar si $L_1 : (x,y,z)=t(2,-3,4)$, $L_2 : \begin{cases} x=7s \\ y=-2s \\ z=3s \end{cases}$ y $L_3 : \dfrac{x}{9}=\dfrac{-y}{5}=\dfrac{z}{7}$ pertenecen a un mismo plano. Si es así, hallar la ecuación del plano.

52. Conseguir la solución del sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ más cercana a $P(1,1,1)$.

53. Sean la recta $L_1 : \dfrac{9-3x}{6} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-2}{4}$ y el plano $\pi_1 : 3x-2y+6z=-5$

(a) Hallar la ecuación de la recta L_2 perpendicular al plano π_1 y que pasa por el origen.

(b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta L_1 y que pasa por el origen.

54. Hallar la distancia de la recta $L : \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$ al plano $x-y+z=1$.

55. Hallar el punto de intersección de la recta L que pasa por el punto $P(1,-3,4)$ y es perpendicular al plano $x-2y-z=9$ con dicho plano.

56. Hallar los valores de α tales que los vectores $\boldsymbol{u}=(\alpha,0,-1)$, $\boldsymbol{v}=(0,2-\alpha,1)$ y $\boldsymbol{w}=(1,1,0)$ sean coplanares y buscar la ecuación del plano que los contiene.

57. Sean los planos $\pi_1 : x-y+z=1$ y $\pi_2 : 2x+3z=0$

(a) Hallar la ecuación de la recta L paralela a dichos planos y que pasa por el punto $P(1,-1,1)$.

(b) Hallar la ecuación del plano π perpendicular a los planos dados y que pasa por el punto $Q(1,1,0)$.

(c) Encontrar el punto de intersección de L con π.

58. Sean el plano $\pi : -x+9y+6z=23$ y l recta $L : \dfrac{x+2}{3} = 3-y = \dfrac{z+1}{2}$.

(a) Hallar la intersección P de la recta con el plano.

(b) Encontrar el punto de corte Q del plano con el eje x.

(c) Hallar la ecuación de la recta que pasa por Q y uno de los puntos de P.

(d) Encontrar la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a L.

59. Sean los planos

$$\pi_1 : x-y+2z=0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 3x+y+z=1$$

y las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-4t \\ z=5-t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x=4-s \\ y=-1+6s \\ z=4+s \end{cases}$$

(a) Hallar la ecuación de la recta que es paralela a dichos planos y que pasa por el punto P de intersección de las rectas dadas.

(b) Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a los planos dados y que pasa por P.

60. Sean las rectas $L_1 : \dfrac{2-2x}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{3-z}{-1}$ y $L_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=-1-3t \\ z=-4 \end{cases}$

(a) Hallar, si es posible, la ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

(b) Hallar el punto en el cual la primera recta corta al plano xy.

(c) Hallar para cuales valores de k, el plano $kx-2y+3z=4$ es paralelo a la segunda recta.

(d) Encontrar la intersección de L_2 con el plano $y-x-z=2$.

61. (a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -2t+4 \\ z = t-3 \end{cases}$ y al punto $P(5,0,2)$.

    (b) Hallar la distancia de ese plano al origen.

62. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5,1,1)$, si se sabe que los vectores $\boldsymbol{u} = (2,1,2)$, $\boldsymbol{v} = (-4,-5,7)$ son paralelos a él.

63. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1,1,0)$, $Q(3,2,4)$ si se sabe que el vector $\boldsymbol{u} = (7,-1,-3)$ es paralelo a él.

64. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3,2,2)$ y es paralelo al plano $3x-2y+z=6$.

65. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano

$$\pi : 4x - y + z = 9.$$

66. Calcule la distancia del punto P al plano dado

    1. $P(5,30,426)$, $x = 3$ 2. $P(3,-2,5)$, $2x - y + z = 0$ 3. $P(1,1,5)$, $2x + 3y - 2z = 4$

67. Verifique que los planos $\pi_1 : 2x + y - z = 4$, $\pi_2 : 4x + 2y - 2z - 5 = 0$ son paralelos. Halle la distancia entre ellos.

68. Suponga que los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z = D_1$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ son paralelos. Obtenga una fórmula para calcular la distancia entre ellos.

69. Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $\pi_1 : 3x - y + 2z = 5$, $\pi_2 : 3x - y + 2z = 7$. Calcule el volumen del cubo.

70. Los vectores $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{v} = (-3,1,1)$, $\boldsymbol{w} = (1,-4,7)$ determinan 3 de las aristas de un paralelepípedo. Halle las ecuaciones de los planos en donde se encuentran sus caras.

71. Hallar un punto en el eje x que equidiste de los dos planos paralelos $\pi_1 : 3x-y+2z = 6$, $\pi_2 : 3x-y+2z = 13$.

72. Hallar un punto en el eje y que equidiste de los dos planos $\pi_1 : 2x + 2y + z = 0$, $\pi_2 : 4x - 3y = 2$.

73. Demuestre que los tres planos $\pi_1 : x + y + z = 6$, $\pi_2 : x - y - z = 0$, $\pi_3 : 2x - 3y + z = 1$ se cortan en un solo punto. Determine ese punto.

74. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,4,7)$ y es perpendicular al plano

$$\pi : 3x - 2y + z = 9.$$

75. El punto $P(2,1,-1)$ se encuentra en el plano $\pi : x - y + z = 0$. Determine la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por P y que se encuentran sobre el plano dado.

76. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de la recta $x = 5+t$, $y = 3-2t$, $z = 4+3t$, con los planos paralelos $\pi_1 : 2x + y + z = 3$, $\pi_2 : 2x + y + z = 9$. ¿Es esta la distancia entre los dos planos paralelos dados?

77. Demostrar que no existen puntos (x,y,z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y que están sobre la recta $\boldsymbol{v} = (2,-2,-1) + t(1,1,1)$

78. Demostrar que todo punto sobre la recta $\boldsymbol{v} = (1,-1,2) + t(2,3,1)$ satisface $5x - 3y - z - 6 = 0$.

79. Determine la componente z del vector $\boldsymbol{v} = (2,4,z)$, si se sabe que forma un ángulo de magnitud 60° con el vector $\boldsymbol{w} = (1,2,0)$.

80. Encuentre la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4,1,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(1,-3,2)$.

81. Dadas las rectas $L_1 : 1-x = \dfrac{y+\alpha}{\alpha-1} = z$ y $L_2 : \begin{cases} 2\alpha x + y + z = 1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$. Determine

    (a) El valor de α para el cual L_1 y L_2 son ortogonales.

    (b) Para $\alpha = 2$, la recta proyección ortogonal de L_1 sobre el plano de ecuación $\pi_1 : x+y+z+2=0$.

    (c) Para $\alpha = 2$, un plano que sea paralelo a L_1 y L_2 y forme con los planos coordenados un tetraedro de volumen 36.

    (d) Para $\alpha = 2$, la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

82. Hallar la ecuación del plano que pasa por $\left(\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{3}{2}\right)$ y cuyo vector normal tiene longitud 2 y dos de sus ángulos directores son $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ y $\beta = \dfrac{\pi}{3}$.

83. Determinar la ecuación del plano que está a una distancia de 2 unidades del origen y contiene a la recta determinada por los planos $3x - y + 4z = 8$ y $4x + y + 2z = 2$.

84. Hallar el lugar geométrico de los puntos que distan del plano $3x - 2y - 6z = 12$ el doble que del plano $x - 2y + 2z + 4 = 0$.

85. Hallar el punto o los puntos, si existen, de intersección entre los planos

$$\pi_1 : 2x - 3y - 4z = 2 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : x + 4y - 5z = 0.$$

86. Hallar el punto o los puntos, si existen, de intersección entre los planos

$$\pi_1 : x + y + 4z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 2x - y + 3z = 2.$$

87. Hallar el punto o los puntos, si existen, de intersección entre los planos

$$\pi_1 : 3y - 2x + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : 4x - 6y - 2z = -2.$$

88. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : -4x + 2y + 4z = 1, \qquad \pi_2 : 6x - 2y - 5z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : -6x + 4y + 7z = 3.$$

89. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : x + 2y + z = 3, \qquad \pi_2 : 2y - 3x - z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 2x + 4y + 2z = 5.$$

90. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 5x + 4y - 2z = 0, \qquad \pi_2 : x - 3y + 4z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 6x + 2y + 7z = 0.$$

91. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 2x - y - 2z = 0, \qquad \pi_2 : 4x + 3y + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 2x + 4y + 3z = 0.$$

92. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 2x - y + 2z = 8, \qquad \pi_2 : x + 5y - 4z = -4,$$
$$\pi_3 : 14y - 2z = -15, \qquad \pi_4 : 3x + 4y - 2z = 4.$$

93. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 3x + 6y - 2z = 1, \qquad \pi_2 : x + y - 3z = 6 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 2x + 2y - 6z = 5.$$

94. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 3x - 2y + z = 4, \qquad \pi_2 : -x + 3y - 2z = 2 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 5x - 8y + 5z = 0.$$

95. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : 2x + 5y - z = 1, \qquad \pi_2 : 7y - 2z = -1 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : -x + 3y - z = 2.$$

96. Hallar la intersección, si existe, entre los planos

$$\pi_1 : x - 3y - z = 0, \qquad \pi_2 : 2x + 7y - 5z = 1,$$
$$\pi_3 : 3x + 4y - 6z = 1, \qquad \pi_4 : 5x - 2y - 8z = 1.$$

97. Hallar el valor o los valores de la constante β para que los planos

$$\pi_1 : x + y - \beta z = 1, \qquad \pi_2 : \beta y - z = 2\beta - 5 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 4x + y - \beta z = \beta.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

98. Hallar el valor o los valores de la constante a para que los planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z = 4, \quad \pi_2 : 3x + (a+5)\,y + 10z = a + 12 \quad \text{y} \quad \pi_3 : -x - 2y + (a-5)\,z = a - 6.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

99. Hallar el valor o los valores de la constante α para que los planos

$$\pi_1 : 2x + y + 3z = -5, \qquad \pi_2 : \alpha x + (2\alpha - 1)\,y + z = -10 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : x + y + z = 0.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

100. Hallar el valor o los valores de la constante λ para que los planos

$$\pi_1 : x + 3y + z = 2, \qquad \pi_2 : x + 2y - 5z = 4 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 2x + 5y - \lambda^2 z = \lambda + 4.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

101. Hallar el valor o los valores de la constante α para que los planos

$$\pi_1 : 5x - 4y + 13z = \alpha, \qquad \pi_2 : 12x + 3y - z = 2\alpha \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : 9x - y - 5z = 3\alpha z.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.

(c) No tenga puntos en común.

102. Hallar el valor o los valores de la constante α para que los planos

$$\pi_1 : \alpha x + 2y + 3z = 1, \qquad \pi_2 : \alpha^2 x + 4y + 9z = 2 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 : \alpha^3 x + 8y + 27z = 3.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

103. Hallar el valor o los valores de las constantes a y b para que los planos

$$\pi_1 : 3x - 4y + 7z = b - 11, \qquad \pi_2 : x - y + 2z = -3,$$

$$\pi_3 : 2x - y + 3z = -4, \qquad \pi_4 : -x + 3y + (a-4)\, z = b + 7.$$

(a) Tenga un solo punto en común. Hallar ese punto de intersección.
(b) Se intersecten en una recta. Halle las ecuaciones paramétricas de esa recta.
(c) No tenga puntos en común.

104. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** ó **FALSAS**.

(a) La recta $(x, y, z) = t\,(1, 1, 2)$ es paralela al plano $2x + 4y + 6z = 0$.
(b) La distancia del punto $P\,(1, 1, 2)$ al plano $x - y + z = 2$ es 2.
(c) Si el vector director de una recta es perpendicular a un vector normal a un plano, entonces la recta y el plano son perpendiculares.
(d) El punto $P\,(-2, 1, 2)$ pertenece el plano $\pi : x + 2y = 0$.
(e) Loas planos xy y yz se cortan en un punto.
(f) El vector $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 3)$ es paralelo al plano de ecuación $\pi : x - 2y + z = 5$.
(g) El vector director de la recta de ecuación $\dfrac{1-2x}{3} = 2 - y, \quad z = -3,$ es $\boldsymbol{v} = (3, 2, 0)$.
(h) Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelas, entonces tienen un punto en común.
(i) Dos planos en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelas, entonces se intersectan.
(j) Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ siempre tienen un punto en común.

105. Seleccionar la letra correspondiente a la única alternativa correcta. Justificar todas sus respuestas.

1 Si L es una recta paralela a un plano π del espacio con $\boldsymbol{v}$ un vector director de L y $\boldsymbol{n}$ un vector normal a π entonces:

a La distancia entre L y π tiene que ser cero.
b La distancia entre L y π tiene que ser distinto de cero.
c $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{n}$ son paralelos.
d $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{n}$ son perpendiculares.

2 La ecuación de la recta que pasa por $P\,(0, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $x - y + z = 0$ es

$$a.\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad b.\ \ x = 2 - y = z - 1 \qquad c.\ \ x = y - 2 = z - 1 \qquad d.\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

3 La ecuación del plano que pasa por $P\,(1, 0, 3)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+5}{3} = y + 2 = \dfrac{z+4}{2}$ es

$$a.\ \ 3x + y + 2z = 9 \qquad b.\ \ x + 3z = 9 \qquad c.\ \ 3x + y + 2z = 14 \qquad d.\ \ x + 3z = 10$$

4 Las ecuaciones de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{v} = (4,5,6)$ son:

a. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{6}$ *b.* $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z+3}{6}$

c. $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+6}{3}$ *d.* $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+6}{3}$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $L : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$; 1.2. $L : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$; 1.3. $L : \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -4+t \\ z = -7+2t \end{cases}$; 2. $L : \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+t \\ z = 6+2t \end{cases}$;

3. $x+2 = z-2, \quad y = 1$; 4. $L : \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases}$; 5. $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{OP} = t\boldsymbol{v} \implies (x,y) - (0,-3) = t(2,1)$;

6. $L : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$; 7. $L : \begin{cases} x = x_0 + x_0 t \\ y = y_0 + y_0 t \\ z = z_0 + z_0 t \end{cases}$; 8.1. $L : \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 2+7t \\ z = 5+2t \end{cases}$; 8.2. $L : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-t \\ z = 6+2t \end{cases}$;

8.3. $L : \begin{cases} x = 2t \\ y = 6t \\ z = 5t \end{cases}$; 9. Si pertenece; 10. No pertenece; 11.*a.* No pertenece; 11.*b.* Si pertenece;

12. $L : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 4 \\ z = 1-t \end{cases}$; 13. $L : \frac{x+1}{2} = 2-y = \frac{1-z}{3}$; 14. $L : t = z-4, \quad x = 1, \quad y = -2$;

15. $L : \begin{cases} x = -4+2t \\ y = 7+t \\ z = 3+5t \end{cases}$; 16. $\boldsymbol{v} = (10,17,16)$; 17. $\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$; 18. $\theta = \pi$;

19. $\theta = \arccos\left(\frac{72}{77}\right)$; 20. $\theta = \arccos\left(\frac{27}{\sqrt{1394}}\right)$; 21. $P(-2,-1,-3)$; 22. $P(7,-4,4)$;

23. $P(7,-1,10)$; 25. No se intersectan; 27. $L : \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1-2t \\ z = 6 \end{cases}$ y $L : \frac{x+2}{3} = \frac{1-y}{2}, \quad z = 6$;

28. $L : \begin{cases} x = 6t \\ y = -3+4t \\ z = 5+t \end{cases}$ y $L : \frac{x}{6} = \frac{y+3}{4} = z-5$; 30. $d(P,L) = \frac{\sqrt{2110}}{10}$; 31. $d(P,L) = 0$;

33. $P(2,-4,2)$; 34. ; 35. Plano $xy : z = 0$, Plano $xz : y = 0$, Plano $yz : x = 0$; 36. $P(7,0,1)$;

37.1. $\pi : x+y+z = 0$; 37.2. $\pi : x = 2$; 37.3. $\pi : 2y+3z = 23$; 37.4. $\pi : 3x+2y+6z = 4$;

37.5. $\pi : 2x+7y-4z = 14$; 38. $\pi : x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$; 39.*a.* $\pi : -2x-3y+2z = 7$;

39.*b.* $\pi : 2x+3y-2z = 10$; 40.1. Si pertenecen; 40.2. No pertenecen; 40.3. Si pertenecen;

40.4. No pertenecen; 40.5. No pertenecen; 41.1. $P(1,0,0)$, $\boldsymbol{n} = (3,0,1)$; 41.2. $P(1,0,1)$, $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$;

41.3. $P(5,-1,1)$, $\boldsymbol{n} = (1,-1,-1)$; 41.4. $P(5,3,2)$, $\boldsymbol{n} = (3,-2,7)$; 42.1. Ninguno; 42.2. Paralelos;

42.3. Paralelos; 42.4. Perpendiculares; 42.5. Paralelos; 43.1. $\pi : 2x-13y+7z = 0$;

43.2. $\pi : x-2y = 0$; 43.3. $\pi : 8x-13y+3z = 18$; 43.4. $53y-9x-16z = 59$; 43.5. $\pi : bcx+acy+abz = abc$;

46. $\pi_1 : z = 1$ y $\pi_2 : x = 2$; 47.*a.* $L : \frac{x+9}{2} = -(y+1) = \frac{2-z}{2}$; 47.*b.* $d(O,L_2) = \sqrt{74}$; 47.*c.* $\theta = \frac{\pi}{4}$;

48. $L : \frac{x-1}{9} = -\frac{y+1}{8} = z-1$; 49. $\pi : 5x-2y+z = 11$; 50. $L : \begin{cases} x = 1+(x_0-1)t \\ y = 2+(y_0-2) \\ z = 3+(z_0-3)t \end{cases}$;

51. Si pertenecen, $\pi : 22y-x+17z = 0$; 52. $P\left(-\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{1}{13}\right)$; 53.*a.* $L : \frac{x}{3} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{6}$;

53.*b.* $\pi : 2x-4y-z = 0$; 54. $d(L,\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 55. $Q(2,-5,3)$; 56. $\alpha = 1, \quad \pi : x-y+z = 0$;

57.a. $L:\begin{cases} x=1-3t \\ y=-1-t \\ z=1+2t \end{cases}$; 57.$b$. $\pi : 3x+y-2z=4$; 57.c. $Q\left(\frac{13}{7},-\frac{5}{7},\frac{3}{7}\right)$; 58.$a$. $L:\frac{x+2}{3}=3-y=\frac{z+1}{2}$;

58.b. $Q(-23,0,0)$; 58.c. $L:\frac{x-1}{24}=\frac{y-2}{2}=z-1$; 58.$d$. $\pi : 12x+10y-13z=19$; 59.a. $L:\frac{5-x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-3}{4}$;

59.b. $\pi : 3x-5y-4z=38$; 60.a. $\pi : 6x+2y+5z+10=0$; 60.b. $A(4,-7,0)$; 60.c. $k=-6$;

60.d. $B\left(\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-4\right)$; 61.$a$. $\pi : 6x+11y+4z=38$; 61.b. $d(O,\pi)=\frac{38}{173}\sqrt{173}$; 62. $\pi : 17x-22y-6z=57$;

63. $\pi : x+34y-9z=35$; 64. $\pi : 3x-2y+z=7$; 65. $\pi : y+z=0$; 66.1. $d(P,\pi)=2$;

66.2. $d(P,\pi)=\frac{13}{6}\sqrt{6}$; 66.3. $d(P,\pi)=\frac{9}{17}\sqrt{17}$; 67. $d(\pi_1,\pi_2)=\dfrac{1}{4}\sqrt{6}$; 68. $d(\pi_1,\pi_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$;

69. $l=\frac{1}{7}\sqrt{14}$; 70. $\pi_{uv} : x-4y+7z=0$, $\pi_{uw} : 3x-y-z=0$ y $\pi_{vw} : x+2y+z=0$; 71. $P\left(\frac{19}{6},0,0\right)$;

72. $P_1(0,6,0)$ y $P_2\left(0,-\frac{6}{19},0\right)$; 73. $P(3,2,1)$; 74. $L:\begin{cases} x=3+3t \\ y=4-2t; \\ z=7+t \end{cases}$ 75. $L:\begin{cases} x=2+(x_0-2)\,t \\ y=1-(y_0-1)\,t; \\ z=-1+(z_0+1)\,t \end{cases}$

76. $d(A,B)=\sqrt{6}$, No es la distancia entre los planos; 79. ; 80. ; 81.a. $\alpha=2$;

81.b. ; 81.c. ; 81.d. ; 82. $\pi : \sqrt{2}x+y+z=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$;

83. ; 84. ; 85. $L:\begin{cases} x=\frac{8}{11}+\frac{31}{11}\,t \\ y=-\frac{2}{11}+\frac{6}{11}\,t; \\ z=t. \end{cases}$ 86. $L:\begin{cases} x=1-\frac{17}{3}t \\ y=\frac{5}{3}t \\ z=t \end{cases}$;

87. No se intersectan; 88. $L:\begin{cases} x=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\,t \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}-t. \end{cases}$; 89. No se intersectan; 90. $P(0,0,0)$;

91. $L:\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=2t \end{cases}$; 92. $P\left(3,-1,\frac{1}{2}\right)$; 93. No se intersectan; 94. $L:\frac{48-21x}{17}=\frac{10-7y}{5}=z$;

95. $P(-5,13,46)$; 96. $L:\frac{3x+1}{22}=y=\frac{3z+1}{13}$; 97.$a$. $\beta\neq\pm1$, $P\left(\frac{1}{3}(\beta-1),\frac{2\left(\beta^3-\beta^2-22\beta-2\right)}{3\left(\beta^2-1\right)},\frac{(\beta+3)(\beta-5)}{\beta^2-1}\right)$;

97.b. No existe ningún β; 97.c. $\beta=\pm1$; 98.a. $a\neq1$ y $a\neq2$, $P(-1,1,1)$; 98.b. Para $a=1$,

$L:\begin{cases} x=1-2t \\ y=t\,. \\ z=1 \end{cases}$ Para $a=2$, $L:\begin{cases} x=t \\ y=2-t\,; \\ z=t \end{cases}$ 98.c. No existe ningún a; 99.a. No existe α;

99.b. $\alpha=-1$, $L:\begin{cases} x=-5-2t \\ y=5+t\,; \\ z=t \end{cases}$ 99.c. $\alpha\neq-1$; 100.a. $\lambda\neq\pm2$, $P\left(\frac{8\lambda-1}{\lambda+2},\frac{2(1-\lambda)}{\lambda+2},\frac{-1}{\lambda+2}\right)$;

100.b. $\lambda=2$, $L:\begin{cases} x=17t+8 \\ y=-6t-2\,; \\ z=t \end{cases}$ 100.c. $\lambda=-2$; 101.a. $\alpha\in\mathbb{R}$, $P\left(\frac{187}{791}\alpha,-\frac{250}{791}\alpha,-\frac{88}{791}\alpha\right)$;

101.b. No existe α; 101.c. No existe α; 102.a. $\alpha\notin\{0,2,3\}$, $P\left(\frac{1}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-2)},\frac{3-\alpha}{4-2\alpha},\frac{1}{3\alpha-9}\right)$;

102.b. No existe α; 102.c. $\alpha\in\{0,2,3\}$; 103.a. $a\neq0$ y $b=0$, $P(-1,2,0)$; 103.b. $a=0$ y $b=0$,

$L:\begin{cases} x=-t-1 \\ y=t+2\,; \\ z=t \end{cases}$ 103.c. $b\neq0$; 104.a. Falso; 104.b. Falso; 104.c. Falso; 104.d. Verdadero;

104.e. Falso; 104.f. Verdadero; 104.g. Verdadero; 104.h. Falso; 104.i. Verdadero; 104.j. Falso;

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.

3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.

4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática III - Guía 6

Espacios vectoriales.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-3.06**

- Espacios vectoriales complejos y reales. Subespacios de un espacio vectorial.
- Combinación lineal de vectores. Conjunto generador y espacio generado.
- Base de un espacio vectorial. Dimensión de un espacio vectorial.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 115 *: Considere el conjunto de los números reales positivos,* $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ *y el cuerpo de escalares* $F = \mathbb{R}$. *Definimos sobre* V *las operaciones*

- ***Suma :*** *Si* $a, b \in V$, *entonces* $a + b = ab$, *donde* ab *es la multiplicación ordinaria entre números reales.*
- ***Multiplicación por un escalar :*** *Si* $a \in V$ *y* $\alpha \in F = \mathbb{R}$, *entonces* $\alpha a = a^\alpha$.

Demuestre que $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un espacio vectorial.*

Demostración : Verificamos si $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ satisface todas las condiciones de espacio vectorial.

1. **Cerradura bajo la operación suma :** Debemos verificar que si se suma dos elementos de V, obtenemos como resultado un elemento de V, es decir, si sumamos (de la manera como está definida la suma) dos números reales positivos, obtenemos un número real positivo.

   Sean $a, b \in V = \mathbb{R}^+$, entonces

   $$a + b = ab \in \mathbb{R}^+. \quad \longleftarrow \quad \text{se cumple}$$

   1.1. **Propiedad conmutativa para la suma :** Sean $a, b \in V = \mathbb{R}^+$, entonces

   $$a + b = ab = ba = b + a, \quad \longleftarrow \quad \text{se cumple.}$$

   1.2. **Propiedad asociativa para la suma :** Sean $a, b, c \in V = \mathbb{R}^+$, entonces

   $$(a + b) + c = (ab) + c = (ab)\,c = a\,(bc) = a + (bc) = a + (b + c)$$

   se cumple la propiedad.

   1.3. **Existencia del elemento neutro para la suma :** Sea $a \in V = \mathbb{R}^+$, existe un número real positivo, denotado por 0, tal que

   $$a + 0 = a,$$

   en este caso particular, el elemento neutro es 1, es decir $0 = 1$, ya que

   $$a + 0 = a + 1 = a\,(1) = a.$$

   1.4. **Existencia del elemento opuesto para la suma :** Sea $a \in V = \mathbb{R}^+$, existe un número real positivo, denotado por $-a$, tal que

   $$a + (-a) = 0, \qquad \text{donde } 0 \text{ es el elemento neutro para la suma}$$

   en este caso particular, el elemento neutro es 1 y el elemento opuesto es $-a = \dfrac{1}{a}$, ya que

   $$a + (-a) = a\,(-a) = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = 0.$$

2. **Cerradura bajo la operación multiplicación por un escalar :** Debemos verificar que si se multiplica un elemento de V, por un escalar α obtenemos como resultado un elemento de V, es decir, si multiplicamos un número real positivo por un escalar real, (de la manera como está definida la multiplicación por un escalar), obtenemos un número real positivo.

   Sean $a \in V = \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in F = \mathbb{R}$, entonces

   $$\alpha a = a^\alpha \in \mathbb{R}^+. \quad \longleftarrow \quad \text{se cumple,}$$

   ya que, podemos distinguir tres casos

   (a) Si $\alpha > 0$, entonces, es conocido que todo número real positivo elevado a una potencia positiva, sigue siendo positivo.

   (b) Si $\alpha = 0$, entonces, $(0)\, a = a^0 = 1 > 0$.

   (c) Si $\alpha < 0$, entonces, $\alpha a = a^\alpha = \dfrac{1}{a^{-\alpha}} > 0$, puesto que el cociente de términos positivo es positivo.

   2.1. **Primera propiedad distributiva para la multiplicación por un escalar :** Sean $a, b \in V = \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in F = \mathbb{R}$, entonces

   $$\alpha\,(a+b) = \alpha\,(ab) = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^\alpha + b^\alpha = \alpha a + \alpha b,$$

   es decir,

   $$\alpha\,(a+b) = \alpha a + \alpha b,$$

   se cumple.

   2.2. **Segunda propiedad distributiva para la multiplicación por un escalar :** Sean $a \in V = \mathbb{R}^+$ y $\alpha, \beta \in F = \mathbb{R}$, entonces

   $$(\alpha+\beta)\, a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = a^\alpha + a^\beta = \alpha a + \beta a,$$

   es decir,

   $$(\alpha+\beta)\, a = \alpha a + \beta a,$$

   se cumple.

   2.3. **Propiedad asociativa para la multiplicación por un escalar :** Sean $a \in V = \mathbb{R}^+$ y α, β escalares en el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces

   $$(\alpha\beta)\, a = a^{\alpha\beta} = \left(a^\beta\right)^\alpha = \alpha\left(a^\beta\right) = \alpha\,(\beta a)\,,$$

   es decir,

   $$(\alpha\beta)\, a = \alpha\,(\beta a)\,,$$

   se cumple.

   2.4. **Elemento unidad para la multipkicación por un escalar :** Sea $a \in V = \mathbb{R}^+$, existe un escalar α en $F = \mathbb{R}$, tal que

   $$\alpha a = a,$$

   en este caso particular, $\alpha = 1$, ya que

   $$\alpha a = (1)\, a = a^1 = a.$$

Puesto que, $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ cumple con todas las propiedades de espacio vectorial, concluimos que $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un **espacio vectorial**. ★

Ejemplo 116 *: Demuestre que el conjunto* $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *de todas las matrices de tamaño* $m \times n$ *de coeficientes reales, con las operaciones ordinarias de suma y multiplicación por un escalar definidas entre matrices y el cuerpo de escalares* $F = \mathbb{R}$, *es un espacio vectorial.*

Demostración : Verificamos si $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ satisface todas las condiciones de espacio vectorial.

1. **Cerradura bajo la operación suma :** Debemos verificar que si se suma dos elementos de V, obtenemos como resultado un elemento de V, es decir, si sumamos (de la manera como está definida la suma) dos matrices de tamaño $m \times n$, obtenemos una matriz de tamaño $m \times n$.

   Sean $A, B \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$, tales que $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, entonces

   $$A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (A+B)_{m\times n} \in M_{m\times n}. \quad \longleftarrow \quad \text{se cumple}$$

   1.1. **Propiedad conmutativa para la suma :** Sean $A, B \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tales que $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, entonces

   $$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} + (a_{ij})_{m\times n} = B + A,$$

   es decir,

   $$A + B = B + A,$$

   se cumple la propiedad.

   1.2. **Propiedad asociativa para la suma :** Sean $A, B, C \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tales que $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ y $C = (c_{ij})_{m\times n}$, entonces

   $$\begin{aligned}(A+B)+C &= (a_{ij}+b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij}+b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij}+c_{ij}))\\ &= (a_{ij}) + (b_{ij}+c_{ij}) = A + (B+C),\end{aligned}$$

   es decir,

   $$(A+B)+C = A+(B+C),$$

   se cumple la propiedad.

   1.3. **Existencia del elemento neutro para la suma :** Sea $A \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A = (a_{ij})_{m\times n}$, existe una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, denotada por 0, tal que

   $$A + 0 = A,$$

   en este caso particular, el elemento neutro es la matriz cero $0 = (0_{ij})$, ya que

   $$A + 0 = (a_{ij}) + (0_{ij}) = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

   1.4. **Existencia del elemento opuesto para la suma :** Sea $A \in V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A = (a_{ij})_{m\times n}$, existe una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, denotada por $-A$, tal que

   $$A + (-A) = 0, \qquad \text{donde } 0 \text{ es el elemento neutro para la suma}$$

   en este caso particular, el elemento opuesto es la matriz opuesta $-A = (-a_{ij})$, ya que

   $$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0_{ij}) = 0.$$

2. **Cerradura bajo la operación multiplicación por un escalar :** Debemos verificar que si se multiplica un elemento de V, por un escalar α obtenemos como resultado un elemento de V, es decir, si multi-

plicamos una matriz de tamaño $m\times n$ por un escalar real, (de la manera como está definida la multiplicación por un escalar), obtenemos una matriz de tamaño $m\times n$.

Sean $A\in V=M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $\alpha\in F=\mathbb{R}$, entonces

$$\alpha A=\alpha\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\alpha A\right)_{m\times n}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right). \quad \longleftarrow \quad \text{se cumple,}$$

ya que, al multiplicar una matriz de tamaño $m\times n$ por un escalar, se obtiene una matriz del mismo tamaño.

2.1. **Primera propiedad distributiva para la multiplicación por un escalar :**

Sean $A,B\in V=M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tales que $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ y $\alpha\in F=\mathbb{R}$, entonces

$$\alpha\left(A+B\right)=\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(\alpha\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right)=\left(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}\right)=\left(\alpha a_{ij}\right)+\left(\alpha b_{ij}\right)=\alpha A+\alpha B,$$

es decir,

$$\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B,$$

se cumple la propiedad.

2.2. **Segunda propiedad distributiva para la multiplicación por un escalar :**

Sean $A\in V=M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $\alpha,\beta\in F=\mathbb{R}$, entonces

$$\left(\alpha+\beta\right)A=\left(\alpha+\beta\right)\left(a_{ij}\right)=\left(\left(\alpha+\beta\right)a_{ij}\right)=\left(\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}\right)=\left(\alpha a_{ij}\right)+\left(\beta a_{ij}\right)=\alpha A+\beta A,$$

es decir,

$$\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A,$$

se cumple la propiedad.

2.3. **Propiedad asociativa para la multiplicación por un escalar :** Sean $A\in V=M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y α, β escalares en el cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$, entonces

$$\left(\alpha\beta\right)A=\left(\alpha\beta\right)\left(a_{ij}\right)=\left(\alpha\beta\left(a_{ij}\right)\right)=\left(\alpha\left(\beta a_{ij}\right)\right)=\alpha\left(\beta a_{ij}\right)=\alpha\left(\beta A\right),$$

es decir,

$$\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right),$$

se cumple la propiedad.

2.4. **Elemento unidad para la multipkicación por un escalar :** Sea $A\in V=M_{m\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A=(a_{ij})_{m\times n}$, existe un escalar α en $F=\mathbb{R}$, tal que

$$\alpha A=A,$$

en este caso particular, $\alpha=1$, ya que

$$\alpha A=\left(1\right)\left(a_{ij}\right)=\left(\left(1\right)a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\right)=A.$$

Se cumplen todas las propiedades de espacio vectorial, concluimos que $\left(M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right),+,\cdot,\mathbb{R}\right)$ es un **espacio vectorial**. ★

Ejemplo 117 *: Sea el espacio vectorial* $V=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>0\}$ *con las operaciones:*

- ***Suma :*** *Si* $a,b\in V$, *entonces* $a+b$, *es la suma usual entre números reales.*
- ***Multiplicación por un escalar :*** *Si* $a\in V$ *y* $\alpha\in\mathbb{R}$, *entonces* $\alpha a=a^{\alpha}$.

¿Es $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ *un espacio vectorial?*

Solución : El elemento neutro para la suma usual es el cero, pero cero no pertenece a V, por lo tanto $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ **NO** es un espacio vectorial. ★

Ejemplo 118 *: Sea* V *el espacio vectorial real de todas las funciones* f *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar real definidas en las funciones reales. Sea*

$$W = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f\left(x^2\right) = f^2(x) \right\}.$$

¿Es W *un subespacio vectorial de* V*?.*

Solución : No, ya que no es cerrado bajo la suma: Sean $f, g \in W$, entonces

$$(f+g)\left(x^2\right) = f\left(x^2\right) + g\left(x^2\right) = f^2(x) + g^2(x) = \left(f^2 + g^2\right)(x) \neq (f+g)^2(x).$$

★

Ejemplo 119 *: Sean*

$$H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostrar que H *es un subespacio de* $M_{2\times 2}$, *con las operaciones de suma y multiplicación ordinarias definidas en el conjunto* $M_{2\times 2}$.

Demostración : Se debe demostrar que H es diferente de vacío, es cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por un escalar dado en $M_{2\times 2}$. Observemos que el vector

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

ya que, el elemento a_{44} es igual a cero.

Demostremos que H es cerrado bajo la suma ordinaria definida en $M_{2\times 2}$. Sean $A, B \in H$, vectores genérico,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la suma.

Demostremos que H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar ordinaria definida en $M_{2\times 2}$, sea k un escalar en el cuerpo de escalares F, entonces

$$kA = k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, luego, H es un subespacio del espacio vectorial $M_{2\times 2}$. ★

Ejemplo 120 *: Considere los vectores* $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5)$ *y* $\boldsymbol{c} = (1, 0)$. *Exprese al vector* $\boldsymbol{c}$ *como una combinación lineal de los otros vectores.*

Solución : Tenemos

$$\alpha(1,2) + \beta(3,5) = (1,0) \qquad \Longrightarrow \qquad (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 5\beta) = (1,0),$$

de aquí,
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -5, \quad \beta = 2,$$
por lo tanto,
$$(1,0) = -5\,(1,2) + 2\,(3,5)\,.$$

★

Ejemplo 121 *: Si $\mathbb{C}$ es el espacio vectorial de los números complejos. ¿Qué vectores de $\mathbb{C}^3$ son combinaciones lineales de $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$?.*

Solución : Sea $\boldsymbol{u} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) \in \mathbb{C}^3$, entonces
$$(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) = \alpha_1\,(1,0,-1) + \alpha_2\,(0,1,1) + \alpha_3\,(1,1,1)\,,$$
esto implica
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = a_1 + ib_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = a_2 + ib_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a_3 + ib_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 + ib_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 + ib_2 \\ -1 & 1 & 1 & a_3 + b_3 \end{array}\right)$$
de aquí,
$$\alpha_1 = a_2 - a_3 + i\,(b_2 - b_3)\,, \quad \alpha_2 = 2a_2 - a_1 - a_3 - i\,(b_1 - 2b_2 + b_3)\,, \quad \alpha_3 = a_1 - a_2 + a_3 + i\,(b_1 - b_2 + b_3)\,,$$
por lo tanto, cualquier vector de $\mathbb{C}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$. ★

Ejemplo 122 *: Escriba el vector $\boldsymbol{w} = (3,1,0)$ como combinación lineal de los vectores*
$$\boldsymbol{v_1} = (2,-2,1)\,, \qquad \boldsymbol{v_2} = (2,1,-1) \quad y \quad \boldsymbol{v_3} = (1,2,2)\,.$$

Solución : Tenemos
$$(3,1,0) = \alpha_1\,(2,-2,1) + \alpha_2\,(2,1,-1) + \alpha_3\,(1,2,2)\,,$$
así,
$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right),$$
de aquí,
$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$
Por lo tanto,
$$(3,1,0) = \frac{1}{3}\,(2,-2,1) + (2,1,-1) + \frac{1}{3}\,(1,2,2)\,.$$

★

Ejemplo 123 *: Demuestre que todo vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.*

Demostración : Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, un vector genérico, entonces
$$(x,y,z) = \alpha_1\,(1,0,0) + \alpha_2\,(0,1,0) + \alpha_3\,(0,0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y,z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,,$$
de aquí,
$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = y \qquad \alpha_3 = z,$$
por lo tanto,
$$(x,y,z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 124 *: Demostrar que si $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces*

$$\operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$$

es un subespacio de V.

Demostración : Se debe demostrar que $\operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$ es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar dado en V.

Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$, entonces

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{w_1} + \alpha_2 \boldsymbol{w_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{w_k}$$

y

$$\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{w_1} + \beta_2 \boldsymbol{w_2} + \cdots + \beta_k \boldsymbol{w_k}.$$

Así,

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\, \boldsymbol{w_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\, \boldsymbol{w_2} + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\, \boldsymbol{w_k} = \gamma_1 \boldsymbol{w_1} + \gamma_2 \boldsymbol{w_2} + \cdots + \gamma_k \boldsymbol{w_k},$$

con lo que, se tiene

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right],$$

por lo tanto, $\operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$ es cerrado bajo la suma.

Por otra parte, sea k un escalar, entonces

$$k\boldsymbol{u} = k\left(\alpha_1 \boldsymbol{w_1} + \alpha_2 \boldsymbol{w_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{w_k}\right) = c_1 \boldsymbol{w_1} + c_2 \boldsymbol{w_2} + \cdots + c_k \boldsymbol{w_k},$$

donde, $c_i = k\alpha_i$, con $i = 1, 2, 3 \ldots, k$, con lo que

$$k\boldsymbol{u} \in \operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right],$$

por lo tanto, $\operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar. Luego concluimos que $\operatorname{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\right]$ es un subespacio de V. ★

Ejemplo 125 *: Determine si el conjunto dado B genera al espacio vectorial dado*

1. *En* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2), (3,4)\}$
2. *En* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$
3. *En* $\mathbb{R}^3$, $B = \{(2,0,1), (3,1,2), (1,1,1), (7,3,5)\}$
4. *En* $M_{2\times 3}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Solución : 1. Para verificar si el conjunto B genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ debemos verificar que todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B. Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un vector genérico, entonces

$$(x,y) = \alpha_1 (1,2) + \alpha_2 (3,4) \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 3\alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = y \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{array} \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{3}{2}\, y - 2x, \qquad \alpha_2 = x - \frac{1}{2}\, y.$$

Así, $(x,y) = \left(\frac{3}{2}\, y - 2x\right)(1,2) + \left(x - \frac{1}{2}\, y\right)(3,4)$. Por lo tanto, el conjunto B genera a $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector genérico, entonces

$$(x, y) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (2, 1) + \alpha_3 (2, 2) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3),$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \end{array} \right) \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c} \text{Infinitas} \\ \text{soluciones} \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores de B no generan a $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vector genérico, entonces

$$(x, y, z) = \alpha_1 (2, 0, 1) + \alpha_2 (3, 1, 2) + \alpha_3 (1, 1, 1) + \alpha_4 (7, 3, 5),$$

de aquí,

$$(x, y, z) = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4),$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 = z \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 & x \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & 5 & z \end{array} \right) \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c} \text{Infinitas} \\ \text{soluciones} \end{array}$$

Por lo tanto, los vectores de B no generan a $\mathbb{R}^3$.

4. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ un vector genérico, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 3\alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_3 = a \\ \alpha_1 - \alpha_3 = b \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_4 = c \\ \alpha_2 + \alpha_4 = d \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 & 3 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array} \right),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = \frac{1}{5} a + \frac{3}{5} b, \qquad \alpha_2 = 3d - c, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{5} a - \frac{2}{5} b, \qquad \alpha_4 = c - 2d.$$

Por lo tanto, los vectores de B generan a $M_{2\times 2}$. ★

Ejemplo 126 *: Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos generan al espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$.

Demostración : Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, un vector genérico, entonces

$$(x, y, z) = \alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

de aquí,

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = y \qquad \alpha_3 = z,$$

por lo tanto,

$$(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

★

Ejemplo 127 *: Sean* $p(x) = 2 - x + 4x^2$ *y* $q(x) = 4 + x + 6x^2$ *en* $\mathbb{P}_2$. *Hallar* $\operatorname{gen}[p, q]$.

Solución : Sea $r \in \mathbb{P}_2$, dado por $r(x) = ax^2 + bx + c$, un vector genérico. Escribimos r como combinación lineal de los vectores p y q.

$$r(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) \qquad \Longrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = \alpha_1\left(2 - x + 4x^2\right) + \alpha_2\left(4 + x + 6x^2\right),$$

de aquí,

$$ax^2 + bx + c = (4\alpha_1 + 6\alpha_2)\,x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)\,x + (2\alpha_1 + 4\alpha_2),$$

resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4\alpha_1 + 6\alpha_2 = a \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = b \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = c \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{rr|c} 4 & 6 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 4 & c \end{array}\right) \quad \leftarrow \quad \frac{3}{2}\,a + b - \frac{5}{2}\,c = 0.$$

Entonces, $\operatorname{gen}[p, q] = \left\{ r(x) = ax^2 + bx + c \ \text{ en } \ \mathbb{P}_2 \ / \ \frac{3}{2}\,a + b - \frac{5}{2}\,c = 0 \right\}.$ ★

Ejemplo 128 *: Sean*

$$H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad y \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. *Demostrar que* H *es un subespacio de* $M_{2\times 2}$.
2. *Hallar* $\operatorname{gen}[B]$.
3. *Encontrar, si es posible, una combinación lineal de los vectores de* B, *tal que dicha combinación lineal sea igual a cero.*

Solución : 1. Se debe demostrar que H es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar dado en $M_{2\times 2}$. Sean $A, B \in H$, vectores genérico,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la suma.

Por otra parte, sea k un escalar, entonces

$$kA = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es cerrado bajo la multiplicación por un escalar, luego, H es un subespacio del espacio vectorial $M_{2\times 2}$.

2. Escribimos la combinación lineal para un vector en $M_{2\times 2}$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & 2\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = b \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = c \\ 0 = d \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & b \\ -1 & 2 & -7 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \Longrightarrow d = 0, \quad a - \frac{3}{2}\,b + c = 0.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{gen}[B] = \left\{ A \in M_{2\times 2} \;/\; A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,b - c & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & 2\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftarrow \text{Infinitas soluciones}$$

No es posible escribir los vectores de B como una combinación lineal igualada a cero. ★

Ejemplo 129 *: Demuestre que si los vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *generan* V*, entonces* $\alpha\boldsymbol{u}$ *y* $\beta\boldsymbol{v}$ *también generan* V*, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$*,* $\beta \neq 0$*.*

Demostración : Sea $\boldsymbol{w} \in V$, puesto que, los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan V, existen escalares α_1 y α_2, tales que,

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v}.$$

Para demostrar que $\alpha\boldsymbol{u}$ y $\beta\boldsymbol{v}$ generan a V, debemos poder escribir cualquier vector de V como combinación lineal de estos vectores. Si $\boldsymbol{w} \in V$, se tiene

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v},$$

entonces, existen escalares k_1 y k_2, tales que, $\alpha_1 = k_1\alpha$ y $\alpha_2 = k_2\beta$, luego

$$\boldsymbol{w} = k_1\alpha\boldsymbol{u} + k_2\beta\boldsymbol{v} = k_1(\alpha\boldsymbol{u}) + k_2(\beta\boldsymbol{v}),$$

por lo tanto, $V = \text{gen}[\alpha\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v}]$. ★

Ejemplo 130 *: Dado* $H = \{2x^2+x+2,\ x^2-2x,\ 5x^2-5x+2,\ -x^2-3x-2\}$, *considere* $T = \text{gen}[H]$. *Determine si el polinomio* $p(x) = x^2+x+2$ *pertenece a* T *subespacio de* $\mathbb{P}_2$.

Solución : Sean c_1, c_2, c_3, c_4 escalares, tales que,

$$c_1(2x^2+x+2) + c_2(x^2-2x) + c_3(5x^2-5x+2) + c_4(-x^2-3x-2) = x^2+x+2,$$

por lo tanto,

$$2c_1x^2 + c_1x + 2c_1 + c_2x^2 - 2c_2x + 5c_3x^2 - 5c_3x + 2c_3 - c_4x^2 - 3c_4x - 2c_4 = x^2+x+2,$$

es decir,

$$(2c_1+c_2+5c_3-c_4)x^2 + (c_1-2c_2-5c_3-3c_4)x + (2c_1+2c_3-2c_4) = x^2+x+2,$$

de aquí,

$$\left\{\begin{array}{l} 2c_1+c_2+5c_3-c_4 = 1 \\ c_1-2c_2-5c_3-3c_4 = 1 \\ 2c_1+2c_3-2c_4 = 2 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

el cual no tiene solución. Así, $p(x) \notin \text{gen}[H]$. ★

Ejemplo 131 *: Sean* $\boldsymbol{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $\boldsymbol{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ *en* $\mathbb{R}^3$. *Demuestre que si* $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$, *entonces* $\text{gen}[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}]$ *es una recta que pasa por el origen.*

Demostración : Consideremos un vector $\boldsymbol{w} \in \text{gen}[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}]$, entonces, $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2}$.

Como $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$, se tiene que,

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2c\boldsymbol{v_1} = (c_1 + c_2c)\boldsymbol{v_1} = \alpha\boldsymbol{v_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{v_1},$$

donde, $\alpha = c_1 + c_2c$. Si $\boldsymbol{w} = (x, y, z)$, entonces

$$(x, y, z) = \alpha(x_1, y_1, z_1) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x = tx_1 \\ y = ty_1 \\ z = tz_1 \end{array}\right. \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{c}\text{Ecuaciones paramétrica} \\ \text{de la recta que pasa} \\ \text{por el origen}\end{array}$$

★

Ejemplo 132 *: Sea el espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ *con las operaciones:*

- *Suma : Si* $a, b \in V$, *entonces* $a + b = ab$, *donde* ab *es la multiplicación usual entre números reales.*
- *Multiplicación por un escalar : Si* $a \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces* $\alpha a = a^\alpha$.

Estudie la dependencia o independencia lineal de los vectores v_1, v_2 *de* V.

Solución : Sean $v_1 = x$ y $v_2 = y$ vectores de V, entonces

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0,$$

es decir,

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^{\alpha_1} + y^{\alpha_2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\alpha_1 \ln x}e^{\alpha_2 \ln y} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(e^{\alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y}\right) = \ln 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{\ln y}{\ln x}\, \alpha_2$$

Observemos que, no necesariamente, α_1 y α_2 son iguales a cero, por lo que concluimos que los vectores son linealmente dependientes. ★

Ejercicios

1. Sea $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^2$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, entonces

   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces

   $$k\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$, es un espacio vectorial.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^3$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, entonces

   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces

   $$k\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$, es un espacio vectorial.

3. Sea $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$. Definimos las **operaciones ordinarias** sobre elementos de $\mathbb{R}^n$.

   - **Suma** $(+)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces

   $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

   - **Multiplicación por un escalar** $(\cdot)$ **:** Si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y k es un escalar que pertenece al cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, entonces

   $$k\boldsymbol{x} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$, es un espacio vectorial.

4. Considere el conjunto de los números reales positivos, $V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$ y el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$. Definimos sobre V las operaciones

   - **Suma :** Si $a, b \in V$, entonces $a + b = ab$, donde ab es la multiplicación ordinaria entre números reales.
   - **Multiplicación por un escalar :** Si $a \in V$ y $\alpha \in F = \mathbb{R}$, entonces $\alpha a = a^\alpha$.

   Demuestre que $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

5. Demuestre que el conjunto $C\,[a,b]$ de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con la suma definida por

   $$(f+g)\,(x) = f\,(x) + g\,(x)\,, \qquad \text{para toda } \ x \in [a,b]\,,$$

   la multiplicación por un escalar definida por

   $$(\alpha f)\,(x) = \alpha f\,(x)\,, \qquad \text{para toda } \ x \in [a,b]$$

   y el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

6. Demuestre que el conjunto $M_{m \times n}$ con las operaciones ordinarias de suma, multiplicación por un escalar entre matrices y el cuerpo de escalares $F = \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

7. Demuestre que el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n, denotado por $\mathbb{P}_n$ con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar ordinarias entre polinomios y le cuerpo de escalares $F=\mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

8. Determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, dé una lista de los axiomas que no se cumplen. En todos los casos considere como cuerpo de escalares a $F=\mathbb{R}$.

   (a) El conjunto que consiste del vector nulo bajo las operaciones ordinarias definidas sobre $\mathbb{R}^2$.

   (b) El conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con $f(a)=f(b)=0$, con la suma y la multiplicación por un escalar ordinarias entre funciones reales.

   (c) $V=\mathbb{R}^2$; $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$ la adición ordinaria, y $\alpha(x,y)=\left(\alpha^2 x,\alpha^2 y\right)$.

   (d) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma (x,x,x), con las operaciones ordinarias entre vectores de $\mathbb{R}^3$.

   (e) $V=R^+$ $x+y$; adición usual, $\alpha x=x^\alpha$.

   (f) $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por
   $$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2+1,y_1+y_2+1)$$
   y la multiplicación por un escalar ordinaria.

   (g) El conjunto del problema 8f con la multiplicación por un escalar definida por
   $$\alpha(x,y)=(\alpha+\alpha x-1,\alpha+\alpha y-1).$$

   (h) $V=\mathbb{R}$; $x+y=xy+1$, αx multiplicación ordinaria.

   (i) $V=\{A\in M_{3\times 3}\ /\ A$ es invertible$\}$; Adición y multiplicación ordinaria para matrices.

   (j) El conjunto de las matrices diagonales de tamaño $n\times n$ con la adición y multiplicación por un escalar ordinario entre matrices.

   (k) El conjunto $C[a,b]$ de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ con la suma y la multiplicación por un escalar ordinarias entre funciones reales.

   (l) El conjunto de matrices 2×2 que tienen la forma
   $$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$
   bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

9. (a) Sea V un espacio vectorial. Demuestre que si $S\subset V$ es un subespacio vectorial de V, entonces $0\in S$.

   (b) Demuestre que el conjunto
   $$A=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_1+x_2=1\right\}$$
   no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

10. Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se indican

   (a) $H=\left\{A\in M_{2\times 2}\ /\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

   (b) Si $\boldsymbol{x}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^3$, entonces
   $$L=\{\lambda\boldsymbol{x}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
   es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (c) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ /\ x_1+x_2+x_3=0\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \ a = d = 0 \right\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

(e) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

11. Sea $H = \left\{ A \in M_{2\times 3} \ / \ A = \begin{pmatrix} -b & a & c \\ -a & b & d \end{pmatrix} \right\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 3}$.

12. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$

(a) todos los α, tal que $\alpha_1 \geq 0$.

(b) todos los α, tal que $\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$.

(c) todos los α, tal que $\alpha_2 = \alpha_1$.

(d) todos los α, tal que $\alpha_1 \alpha_2 = 0$.

(e) todos los α, tal que α_2 es racional.

13. Determine, en cada caso, si el conjunto H dado, del espacio vectorial V, es un subespacio de V.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $H = \{(x, y) \ / \ x = y\}$.

(b) $V = C[a, b]$; H el conjunto de funciones tales que $\displaystyle\int_a^b f(x) \ dx = 1$.

(c) $V = \mathbb{P}_4$; H el conjunto de polinomios de grado 4.

(d) $V = \mathbb{R}^3$; H el conjunto de los planos que pasan por el origen.

14. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se define

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha (x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1).$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?

15. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Se define

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{y} \qquad \alpha (x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0).$$

¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial?

16. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \in M_{2\times 2} \ / \ a + 2d = 0, \quad \text{y} \quad b - 2c = 0 \right\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

17. Sea $H = \{A \in M_{3\times 3} \ / \ A \text{ es antisimétrica}\}$. Demostrar que H es un subespacio de $M_{3\times 3}$.

18. Sean los planos $\pi_1 : 2x - y - z = 3$ y $\pi_2 : x + 2y + 3z = 7$. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta L intersección de los planos dados de modo que sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

19. Sea V el espacio real de todas las funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de V?

(a) todas las f, tales que $f(x^2) = f^2(x)$.

(b) todas las f, tales que $f(0) = f(1)$.

(c) todas las f, tales que $f(3) = 1 + f(-5)$.

(d) todas las f, tales que $f(-1) = 0$.

(e) todas las f que son continuas.

20. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sea V_p el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$, sea V_i el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.

(a) Demostrar que V_p y V_i son subespacios de V.

(b) Demostrar que $V_p + V_i = V$.

(c) Demostrar que $V_p \bigcap V_i = \{0\}$.

21. Demuestre que si W_1 y W_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $W_1 \bigcap W_2$ es un subespacio vectorial de V.

22. Sean

$$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y - z = 0\right\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + 2y + 3z = 0\right\}.$$

Halle $W_1 \bigcap W_2$. ¿Es $W_1 \bigcap W_2$ un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$?

23. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. ¿Es $W_1 \bigcup W_2$ un subespacio vectorial de V?

24. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, tal que la unión de W_1 y W_2 sea también un subespacio. Demostrar que uno de los espacios W_i, con $i = 1, 2$ está contenido en el otro.

25. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, tales que $W_1 + W_2 = V$ y $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$. Demostrar que para todo vector $\boldsymbol{u}$ de V existen únicos vectores $\boldsymbol{u_1}$ en W_1 y $\boldsymbol{u_2}$ en W_2, tales que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}$.

26. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**. Justificar su respuesta.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2)$ y $\alpha(x, y)$ multiplicación por un escalar ordinaria, es un espacio vectorial.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha(x, y) = \left(\alpha^2 x, \alpha^2 y\right)$ es un espacio vectorial.

(c) $V = \mathbb{R}^2$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha(x, y) = (\alpha + x, \alpha + y)$ es un espacio vectorial.

(d) $H = \{A \in M_{2\times 2} \;/\; |A| = 0\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}$, con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar ordinarias.

(e) $V = \mathbb{R}^+$, con las operaciones adición ordinaria y $\alpha x = x^\alpha$, con $\alpha x = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

(f) Si H y S son subespacios de V, entonces $H \bigcup S$ tanbién lo es.

(g) El conjunto de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(h) $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 \leq y\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

(i) $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

27. Seleccionar la letra correspondiente a la **única** alternativa correcta. Justificar se respuesta.

1 Sea $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal. Sean las siguientes proposiciones:

(i) $ad = bc$ $\qquad$ (ii) $a^2 + b^2 = 1$ $\qquad$ (iii) $ac + db = 0$

Entonces, son ciertas

(a) Sólo i $\qquad$ (b) Sólo ii $\qquad$ (c) i y ii $\qquad$ (d) ii y iii

2 Sea $V = \{A \in M_{3\times 3} \ / \ A \text{ es invertible}\}$ con la adición y el producto por un escalar ordinario sobre matrices. Entonces, uno de los siguientes axiomas no se cumple

a. Cerradura de la suma.
b. Cerradura del producto por un escalar.
c. Elemento neutro para la suma.
d. Propiedad asociativa de la suma.

3 Sea $V = \mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria. Entonces, de los axiomas que definen un espacio vectorial, el que no se cumple de los dados a continuación es:

a. Asociatividad del producto por escalares.
b. Conmutatividad de la suma.
c. Cerradura de la suma.
d. Cerradura del productos por escalares.

4 Se dan los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) \ / \ x = 2 + t, \ y = -4 - 2t, \ z = 6 + 3t\}$$

$$B = \{(x, y, z) \ / \ x + 7 + 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) \ / \ (x, y, z) \ \text{ pertenece al primer octante}\}.$$

Entonces, son espacios vectoriales

(a) Sólo B $\qquad$ (b) A y C $\qquad$ (c) A y B $\qquad$ (d) Sólo C

5 El siguiente conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

(a) $\{(x, y, z) \ / \ 2x + 3y + z = 5\}$ $\qquad$ (b) $\{(x, y, z) \ / \ 3x + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \ / \ x = 2t + 5, \ y = 3t, \ z = 5t + 1\}$ $\qquad$ (d) $\left\{(x, y, z) \ / \ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-9}{8}\right\}$

28. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

29. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

Demuestre que H **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

30. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Considere el conjunto

$$H = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \ / \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \text{ para algún } \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

31. Considere los vectores $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 5)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 0)$. Exprese al vector $\boldsymbol{c}$ como una combinación lineal de los otros vectores.

32. Si $\mathbb{C}$ es el espacio vectorial de los números complejos. ¿Qué vectores de $\mathbb{C}^3$ son combinaciones lineales de $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$?.

33. Escriba el vector $\boldsymbol{w} = (3, 1, 0)$ como combinación lineal de los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = (2, -2, 1), \qquad \boldsymbol{v_2} = (2, 1, -1) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_3} = (1, 2, 2).$$

34. Demuestre que todo vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

35. Demostrar que si $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_k}$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces
$$\text{gen}\left[\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_k}\right]$$
es un subespacio de V.

36. Determine si el conjunto dado B genera al espacio vectorial dado

    1. En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,2),(3,4)\}$
    2. En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$
    3. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(2,0,1),(3,1,2),(1,1,1),(7,3,5)\}$
    4. En $M_{2\times 3}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

37. Sean $p(x) = 2 - x + 4x^2$ y $q(x) = 4 + x + 6x^2$ en $\mathbb{P}_2$. Hallar $\text{gen}[p,q]$.

38. Demuestre que si los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan V, entonces $\alpha\boldsymbol{u}$ y $\beta\boldsymbol{v}$ también generan V, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

39. Sean
$$H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
    (a) Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.
    (b) Hallar $\text{gen}[B]$.
    (c) Encontrar, si es posible, una combinación lineal de los vectores de B, tal que dicha combinación lineal sea igual a cero.

40. Dado $H = \left\{2x^2 + x + 2,\ x^2 - 2x,\ 5x^2 - 5x + 2,\ -x^2 - 3x - 2\right\}$, considere $T = \text{gen}[H]$. Determine si el polinomio $p(x) = x^2 + x + 2$ pertenece a T subespacio de $\mathbb{P}_2$.

41. Sean $\boldsymbol{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\boldsymbol{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\boldsymbol{v_2} = c\boldsymbol{v_1}$, entonces $\text{gen}[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}]$ es una recta que pasa por el origen.

42. Demuestre que todo vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, es decir, los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

43. Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

44. Demuestre que todo vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, es decir, los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

45. Escriba el vector $\boldsymbol{w} = (6,-7)$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1} = (3,4)$ y $\boldsymbol{v_2} = (-4,3)$.

46. Escriba el vector $\boldsymbol{w} = (2,4,1,3)$ como combinación lineal de los vectores
$$\boldsymbol{v_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{v_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{v_3} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{v_4} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

47. Considere los vectores de $\mathbb{R}^3$,
$$\boldsymbol{v_1} = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{v_2} = (0,1,1), \qquad \boldsymbol{v_3} = (1,-1,1).$$
    (a) Escriba el vector cero de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(b) Escriba los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(c) Halle, en caso que exista, la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

48. Considere los vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{v_1} = (-3, 2, -1), \qquad \boldsymbol{v_2} = (2, 0, 2), \qquad \boldsymbol{v_3} = (-1, 1, 1)$$

(a) Escriba el vector cero de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(b) Escriba los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(c) Halle, en caso que exista, la matriz inversa de

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

49. Considere los vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{v_1} = (1, 3, 2), \qquad \boldsymbol{v_2} = (2, 1, 3), \qquad \boldsymbol{v_3} = (1, 8, 3).$$

(a) Escriba el vector cero de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(b) Escriba los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$.

(c) Halle, en caso que exista, la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

50. Considere los vectores de $\mathbb{R}^4$,

$$\boldsymbol{v_1} = (1, 1, 1, 1), \quad \boldsymbol{v_2} = (1, 2, 2, 2), \quad \boldsymbol{v_3} = (1, 2, 3, 3), \quad \boldsymbol{v_3} = (1, 3, 4, 4).$$

(a) Escriba el vector cero de $\mathbb{R}^4$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ y $\boldsymbol{v_4}$.

(b) Escriba los vectores canónicos de $\mathbb{R}^4$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ y $\boldsymbol{v_4}$.

(c) Halle, en caso que exista, la matriz inversa de

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

51. Considere los ejercicios 47 y 48. ¿Qué encuentra en común referente a los incisos (a) y (c)?.

52. Considere los ejercicios 49 y 50. ¿Qué encuentra en común referente a los incisos (a) y (c)?.

53. Determine si el conjunto dado B genera al espacio vectorial dado

1. En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (2,2), (5,5)\}$.
2. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,2,3), (-1,2,3), (5,2,3)\}$.

3. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$.

4. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,-1,2), (1,1,2), (0,0,1)\}$.

5. En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,-1,2), (-1,1,2), (0,0,1)\}$.

6. En $M_{2\times 2}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

7. En $M_{2\times 3}$, $B = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$.

54. Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

55. Demuestre que el conjunto formado por los vectores canónicos generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

56. Sea $H = \left\{2 + x,\ 1 - x + 2x^2,\ 3x - 4x^2\right\}$ en $\mathbb{P}_2$. Hallar $\text{gen}\,[H]$.

57. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$. Hallar $\text{gen}\,[H]$.

58. Demuestre que el espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

59. Considere los vectores $\boldsymbol{v} = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{w} = (0,1,-1)$.

   (a) Hallar una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, tal que sea igual al cero.

   (b) Demuestre que los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ generan al subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

60. (a) Halle dos vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ que generen al subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 - x_2 = 3x_3\right\}.$$

   (b) Demuestre que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan V y $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}$ son vectores de V, entonces

$$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$$

   generan a V.

61. Dado $W = \text{gen}\left[4x^2 + x + 2,\ x^2 + 2x,\ -x^2 - 2x - 3,\ 5x^2 + 5x + 2\right]$, ¿el polinomio $q(x) = 11x^2 - 14x + 9$ pertenece a W?

62. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$. Hallar $\text{gen}\,[H]$.

63. En $\mathbb{P}_3$, ¿está $p(x) = x^3 + 3x^2 + 29x - 17$ en el espacio generado por

$$\left\{-2x^3 - 7x^2 + 8x - 8,\ 7x^3 + 9x^2 + 3x + 5,\ -7x^3 + 6x^2 - x - 3\right\}?.$$

   Si es así, escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los polinomios del conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios todo $\mathbb{P}_3$? ¿Por qué?.

64. Hallar tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean linealmente dependientes y tales que dos cualesquiera de ellos son linealmente independientes.

65. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ c - 2a - b = 0, \quad d - a - 2b = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Demuestre que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

(b) Halle una base β_H para H. ¿Cuál es la dimensión de H?.

(c) Exprese la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base encontrada β_H.

66. ¿Son los vectores

$$\boldsymbol{u_1} = (1, 1, 2, 4) \qquad \boldsymbol{u_2} = (2, -1, -5, 2) \qquad \boldsymbol{u_3} = (1, -1, -4, 0) \qquad \boldsymbol{u_4} = (2, 1, 1, 6)$$

linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$.

67. Determine una condición sobre los números a, b, c y d, tal que los vectores (a, b) y (c, d) sean linealmente dependientes.

68. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} ?.$$

69. Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

1. En $\mathbb{R}^2$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

2. En $\mathbb{R}^2$; $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

3. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

4. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

5. En $\mathbb{R}^2$; $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

6. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

8. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

9. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

10. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

11. En $\mathbb{R}^3$; $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

12. En $\mathbb{R}^4$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

13. En $\mathbb{R}^4$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

14. En $\mathbb{P}_2$; $\{1 - 2x + x^2, \quad 3 - 5x + 4x^2, \quad 2x - 3x^2\}$

15. En $\mathbb{P}_3$; $\{1 - x, \quad x + 4x^2, \quad x^3 - 3x^2\}$

16. En $M_{2\times 2}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$

17. En $M_{2\times 2}$; $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$

18. En $M_{2\times 2}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

19. En $M_{2\times 2}$; $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

70. ¿Para qué valores reales de c son linealmente independientes los vectores $(1-c, 1+c)$ y $(1+c, 1-c)$?

71. Suponga que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes. Pruebe o desapruebe

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\ ; \qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\ ; \qquad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$$

son linealmente independientes.

72. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

73. Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(2, 1, 2)$ y $(-1, 3, 4)$.

74. Determine si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere

1. En $M_{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

2. En $M_{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $abcd \neq 0$

3. En $M_{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

75. Encuentre una base en R^3 para el conjunto de vectores en

$$H = \{(x, y, z)\ /\ 2x - y - z = 0\}.$$

76. Encuentre una base del espacio de solución del sistema homogéneo dado

1. $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y + x = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 9y - 6z = 0 \end{cases}$

77. Demostrar que los vectores

$$\boldsymbol{u_1} = (1,1,0,0), \qquad \boldsymbol{u_2} = (0,0,1,1), \qquad \boldsymbol{u_3} = (1,0,0,4), \qquad \boldsymbol{u_4} = (0,0,0,2),$$

forman una base de $\mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}\}$.

78. Demostrar que los vectores

$$\boldsymbol{u_1} = (1,0,-1), \qquad \boldsymbol{u_2} = (1,2,1), \qquad \boldsymbol{u_3} = (0,-3,2),$$

forman una base de $\mathbb{R}^3$. Expresar cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, y $\boldsymbol{u_3}$.

79. Sea $\beta = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ la base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por

$$\boldsymbol{u_1} = (1,0,-1), \qquad \boldsymbol{u_2} = (1,1,1), \qquad \boldsymbol{u_3} = (1,0,0).$$

¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en la base ordenada β?.

80. Sea $H = \text{gen}\left[1 - 2x + x^2,\ 3 - 5x + 4x^2,\ 2x - 3x^2\right]$. Hallar una base para H.

81. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?.$$

82. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en

$$H = \{(x,y,z)\ /\ 3x - 2y + 6z = 0\}.$$

83. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en

$$H = \left\{(x,y,z)\ /\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\right\}.$$

84. Sea $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto $T = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}\}$, donde

$$\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1}, \qquad \boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}, \qquad \boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3},$$

también es un conjunto linealmente independiente en V.

85. Sean $p(x) = 2 - x + 4x^2$ y $q(x) = 4 + x + 6x^2$ en $\mathbb{P}_2$.

(a) Hallar $\text{gen}[p.q]$.

(b) Si $\text{gen}[p.q] \neq \mathbb{P}_2$, completar el conjunto $\{p, q\}$ hasta que sea una base de ese espacio.

86. Sean $H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) Demostrar que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.
   (b) Hallar $\text{gen}\,[B]$.
   (c) Determinar si B es linealmente independiente.
   (d) Determinar si B es una base de H.

87. Sea $H = \left\{ 2+x,\ 1-x+2x^2,\ 3x-4x^2 \right\}$ en $\mathbb{P}_2$.

   (a) ¿H es linealmente independiente? (b) Hallar $\text{gen}\,[H]$. (c) ¿H es una base de $\mathbb{P}_2$?

88. Sean los planos $\pi_1 : 2x - y - z = 3$ y $\pi_2 : x + 2y + 3z = 7$.

   (a) Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta L intersección de los planos dados. Determinar una base y la dimensión de π.
   (b) ¿Es L un subespacio de $\mathbb{R}^3$?.

89. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$. ¿Es B una base de $M_{2\times 2}$?.

90. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$. ¿Es H una base de $M_{2\times 2}$? Si no, completar H hasta formar una base.

91. Hallar una base y la dimensión de $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \in M_{2\times 2} \ / \ a + 2d = 0, \quad \text{y} \quad b - 2c = 0 \right\}$.

92. Sea $H = \left\{ A \in M_{2\times 3} \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & -a & -b \end{pmatrix} \right\}$. Hallar una base de H y su dimensión.

93. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}$.

   (a) Determinar si H es linealmente independiente.
   (b) Hallar $\text{gen}\,[H]$ y su dimensión.
   (c) ¿H es una base de $M_{2\times 2}$. Si no, completar H hasta formar una base.

94. Sea $B = \left\{ 1,\ x+t,\ (x+t)^2 \right\}$, con t un número real fijo. Demostrar que B es una base de $\mathbb{P}_2$.

95. Hallar una base y la dimensión para $H = \{ A \in M_{2\times 2} \ / \ A \text{ es antisimétrica} \}$.

96. En $\mathbb{P}_2$ sea $H = \left\{ 1+x^2,\ -1+x,\ 2-x+x^2,\ -2+4x+2x^2 \right\}$.

   (a) ¿H es linealmente independiente?.
   (b) ¿Cuál es el subconjunto de H con más elementos que es linealmente independiente?.
   (c) ¿A dicho conjunto se le puede agregar otro polinomio de $\mathbb{P}_2$, tal que el nuevo conjunto sea una base de dicho espacio?.

97. Determinar si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**.

   (a) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de un espacio vectorial V de dimensión 3 y $\boldsymbol{w}$ es otro vector de V que no está en $\text{gen}\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, entonces $\text{gen}\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$.

(b) El conjunto $\{(1,2,1)\,,\ (1,0,1)\,,\ (2,2,2)\,,\ (4,4,4)\}$ genera a un plano de $\mathbb{R}^3$.

(c) Sea la base $\beta = \left\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\right\}$ de $\mathbb{P}_2$ y el polinomio $p(x)$, tal que los coeficientes del polinomio en la base β son $(2,-3,1)$. Entonces, $p(x) = -2x + x^2$.

(d) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, tales que $\text{gen}\,[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}] = \mathbb{R}^3$, Entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes.

(e) La dimensión de $H = \text{gen}\,[(1,-1,1)\,,\ (2,0,3)\,,\ (3,-1,4)]$ es 3.

(f) El conjunto de soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas no homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(g) Todo conjunto de vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$ tiene más de tres vectores.

(h) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, tales que ninguno es múltiplo escalar de otro. Entonces son linealmente dependientes.

(i) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes. Entonces alguno de ellos es múltiplo escalar de otro.

(j) $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ es el único conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

(k) Cualquier conjunto de vectores de un espacio vectorial V que no es una base no genera a dicho espacio.

(l) Si $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\}$ es linealmente dependiente.

(m) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ generan a V y $\boldsymbol{w} \in V$, entonces $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ generan a V.

(n) Si $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente en V y si $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n$ son escalares no nulos, entonces $\{c_1\boldsymbol{v_1}, c_2\boldsymbol{v_2}, c_3\boldsymbol{v_3},\ldots,c_n\boldsymbol{v_n}\}$ es linealmente independiente.

98. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores de un espacio vectorial V.

(a) Demostrar que $\text{gen}\,[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ es un subespacio vectorial de V.

(b) Sea $V = \mathbb{P}_3$ $\boldsymbol{u} = p(x) = 1 - x^2$, $\boldsymbol{v} = q(x) = -x + x^2$ y $\boldsymbol{w} = r(x) = x + x^2$.

i. Hallar $\text{gen}\,[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$.

ii. ¿$\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ es linealmente independiente?

iii. ¿$\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ es una base de $\mathbb{P}_3$?

99. ¿Una matriz de tamaño 4×5 puede tener todas sus columnas linealmente independientes?. ¿Y todas sus filas? Justificar la respuesta.

100. Una matriz que no sea cuadrada >puede tener todas sus filas y todas sus columnas linealmente independientes? Justificar la respuesta.

101. Encuentre una base para los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

a. $(1,1,-4,-3)\,,\quad (2,0,2,-2)\,,\quad (2,-1,3,2)$ *b.* $(-1,1,-2,0)\,,\quad (3,3,6,0)\,,\quad (9,0,0,3)$

c. $(1,1,0,0)\,,\quad (0,0,1,1)\,,\quad (-2,0,2,2)\,,\quad (0,-3,0,3)$

102. Encuentre un subconjunto de los vectores que forman una base para el subespacio generado por los vectores; entonces exprese cada vector que no esta en la base como una combinació lineal de los vectores de la base

1. $\boldsymbol{v_1} = (1,0,1,1)\,,\quad \boldsymbol{v_2} = (-3,3,7,1)\,,\quad \boldsymbol{v_3} = (-1,3,9,3)\,,\quad \boldsymbol{v_4} = (-5,3,5,-1)\,.$

2. $\boldsymbol{v_1} = (1,-2,0,3)\,,\quad \boldsymbol{v_2} = (2,-4,0,6)\,,\quad \boldsymbol{v_3} = (-1,1,2,0)\,,\quad \boldsymbol{v_4} = (0,-1,2,3)\,.$

3. $\boldsymbol{v_1} = (1,-1,5,2)\,,\quad \boldsymbol{v_2} = (-2,3,1,0)\,,\quad \boldsymbol{v_3} = (4,-5,9,4)\,,\quad \boldsymbol{v_4} = (0,4,2,-3)\,,\quad \boldsymbol{v_5} = (-7,18,2,-8)\,.$

103. Suponga que $\beta = \{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ es una base de un espacio vectorial V. Decida si el subconjunto $\{\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}, 2\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}\}$ es también una base de V.

104. Sea V el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix}$ y W el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -c \\ b & c \end{pmatrix}$, donde $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

(a) Pruebe que V y W son subespacios de $M_{2\times 2}$.

(b) Encuentre la forma general de un elemento de $H = V \bigcap W$.

(c) Halle la base y la dimensión de V, W y H.

Bibliografía

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.
2. **Kolman, B. y Hill, D. R.**: "*Álgebra lineal*". Octava edición. PEARSON Prentice Hall.
3. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.
4. **Anton, H. - Rorres, C.**: "*Elementary linear algebra. Applications version*". Six Edition. WILEY.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.